

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет информационных технологий

А. А. Ломов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Новосибирск

2021

УДК 681.5+517.977
ББК (Ж/О)32.96я73-1
Л

Рецензент

канд. физ.-мат. наук Г. В. Шевченко

Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями ФГОС ВПО к структуре и результатам освоения основных образовательных программ по профессиональному циклу по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника». Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет» как национального исследовательского университета на 2009–2018 годы.*

Ломов, А. А. Введение в теорию управления: учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. — 188 с.

ISBN

Учебное пособие знакомит читателя с математическими задачами и методами теории управления в традиционном ее понимании. Подбор материала соответствует семестровому курсу «Основы теории управления», читаемому автором для студентов факультета информационных технологий НГУ. В пособии представлены как классические методы анализа и синтеза систем управления, так и ряд методов количественного анализа устойчивости и идентификации систем управления, разработанных в последние десятилетия и еще не отраженных в учебной литературе. Кроме студентов факультета информационных технологий НГУ, материал может быть полезным и для студентов физических и математико-экономических специальностей.

© Новосибирский государственный университет,
© А. А. Ломов

ISBN

Оглавление

1	Начальные понятия	7
1.1	Примеры систем управления с отрицательной обратной связью	7
1.2	Линейные дифференциальные уравнения	10
1.3	Устойчивость	13
1.4	Операторная запись и сдвиг по времени	14
1.5	Линеаризация	15
1.6	Исторические замечания	17
1.7	Регулятор Уатта	17
1.8	Система управления велосипедом	21
1.9	Линейные системы и принцип суперпозиции	22
1.10	Регуляторы	29
2	Анализ линейных систем с помощью преобразования Лапласа	41
2.1	Преобразование Лапласа	41
2.2	Передаточные функции и их свойства	43
2.3	Первая предельная теорема	46
2.4	Вторая предельная теорема	50
2.5	Обращение преобразования Лапласа	53
3	Устойчивость линейных систем	59
3.1	Устойчивость по входу	59
3.2	Критерий Михайлова	63
3.3	Критерий Рауса—Гурвица	66
3.4	Критерий Найквиста	69
3.5	Устойчивость интервальных многочленов	73

4	Линейные системы в нормальной форме первого порядка	77
4.1	Общее решение однородного уравнения. Матричная экспонента.	78
4.2	Каноническая нормальная форма	82
4.3	Частное решение неоднородного уравнения	84
4.4	Устойчивость системы в нормальной форме первого порядка	86
4.4.1	«Неустойчивость» свойства устойчивости матриц	88
4.5	Уравнение Ляпунова	89
4.6	Количественная мера устойчивости	92
5	Дискретные системы	97
5.1	Дискретизация	98
5.2	Построение общего решения разностного уравнения	103
5.3	Устойчивость разностных уравнений	106
5.4	Дискретное уравнение Ляпунова	107
5.5	Количественная мера устойчивости дискретной системы	110
5.6	Модальное управление	111
6	Вопросы алгебры линейных систем	117
7	Нелинейные системы	127
7.1	Фазовая плоскость	127
7.2	Устойчивость в окрестности точки равновесия	128
7.3	Функции Ляпунова	132
7.4	Типы движений в окрестности точки равновесия	133
7.5	Автоколебания. Метод гармонического баланса. Уравнение Гольдфарба.	138
7.6	Системы слежения за экстремумом	142
8	Задачи оптимального управления	147
8.1	Принцип максимума Понтрягина	148
8.2	Условия трансверсальности	152

9	Обратные задачи теории управления	157
9.1	Оценивание процессов в системах управления по наблюдениям с возмущениями	159
9.2	Идентификация параметров уравнений по наблюдениям процессов с возмущениями	163
9.3	Другие методы идентификации	167
9.4	Сравнение методов идентификации	171
10	Лабораторный практикум	175
10.1	Введение в систему моделирования Micro-Cap	175
10.2	Оптимальная настройка и сравнение регуляторов	177
10.3	Введение в программную среду Scilab	179
10.4	Вычисление запаса устойчивости по годографу Найквиста	180
10.5	Дискретизация уравнений систем автоматического управления с ПИ- и ПИД-регуляторами. Анализ точности дискретизации	184
10.6	Расчет запаса устойчивости системы управления с дискретным и непрерывным временем по норме решения матричного уравнения Ляпунова	185
10.7	Оценивание процессов по наблюдениям с возмущениями	186
10.8	Идентификация параметров уравнений системы по наблюдениям процессов с возмущениями	186

Введение

Теорией управления принято называть набор математических методов для решения задач, которые возникают при конструировании и настройке технических устройств, управляемых (или нацеливаемых, программируемых) человеком. За последние полвека методы теории управления вышли за границы чисто технических приложений и стали использоваться в области математической экономики, в медицине и биологии.

Цель пособия – познакомить читателя в первую очередь с теорией управления в традиционном ее понимании, с той ее частью, которую называют теорией регулирования (автоматического управления). Изложение имеет вводный,

ознакомительный характер. Предполагается рассказать о предмете не только на уровне понятий и определений, но и углубиться, насколько это возможно, в математические и физические идеи, выстраивая при этом логику изложения так, чтобы для ряда основных теорем дать простые доказательства.

В пособии представлены как классические методы анализа и синтеза систем управления, так и ряд методов, разработанных в последние десятилетия для количественного анализа устойчивости и идентификации систем управления.

В приложении приведены материалы лабораторного практикума, выполняя который, читатель может самостоятельно проверить методы настройки регуляторов, приобрести опыт анализа запаса устойчивости по классическим критериям на основе годографа Найквиста и современными методами по норме решений матричного уравнения Ляпунова, увидеть трудности процесса дискретизации, научиться «красиво фильтровать» шум наблюдений и идентифицировать параметры уравнений системы управления современными ресурсоемкими, но эффективными методами. В качестве программного инструментария для выполнения лабораторных работ выбраны свободно распространяемые пакеты Micro-Cap Demo (spectrum-soft.com) и Scilab (scilab.org), идейно близкий к MATLAB. Лабораторный практикум в определенной степени может оказаться полезным и для студентов физического факультета и математического отделения экономического факультета НГУ.

После каждой главы приведен перечень примерных контрольных вопросов и упражнений для закрепления материала. Часть задач была взята из пособий, перечисленных в списке литературы.

Автор считает своим долгом выразить признательность Альберту Николаевичу Ангельскому, чей курс «Основы теории управления» слушал автор, и под непосредственным влиянием которого сложилось изложение разделов 1.10, 8.1, глав 2, 7 и 8. Лабораторные работы 10.2, 10.4 составлены на основе материалов А. Н. Ангельского.

Всюду в тексте знак \doteq означает равенство по определению, T – транспонирование матрицы, \square – конец доказательства.

Глава 1

Начальные понятия

В первой главе кратко излагаются начальные понятия теории регулирования, для того чтобы читатель смог самостоятельно выполнить первые практические задания по конструированию и настройке регуляторов. Более общие определения и теоремы с доказательствами отнесены в последующие главы. «Математика есть наука экспериментальная, определения появляются последними» (О. Хевисайд, 1880 г.).

1.1 Примеры систем управления с отрицательной обратной связью

Одним из наиболее часто употребляемых слов в теории управления является *система*. Так называют некоторое устройство, находящееся под внешним воздействием $u(t)$. Поведение устройства (системы) описывается функцией $x(t)$. Важно, что $u(t)$ и $x(t)$ играют роль причины и следствия, поэтому $u(t)$ называют *входом* системы и располагают на рисунках слева, а $x(t)$ называют *выходом* системы и располагают справа¹. Внутри системы могут учитываться причинно-следственные связи между ее частями. Направление от причины к следствию обозначают стрелкой. Все функции времени обычно определяют на интервале $t \geq 0$.

Управление подразумевает наличие цели. Важнейшим в теории автоматического управления является понятие *отрицательной обратной связи*. Всякое отклонение от цели движения исправляется противоположным действием.

¹При записи дифференциальных уравнений поступают наоборот: справа от знака равенства пишут функцию внешнего воздействия.

Это и есть отрицательная обратная связь.

Рассмотрим простейшую систему управления движущимся объектом — например, кораблем. Она включает в себя корабль и устройства для осуществления отрицательной обратной связи: наблюдения за курсом, вычисления его ошибки и указания нового положения руля. Эти устройства называют *регулятором*.

На входе системы управления задается желаемый курс корабля $u = u(t)$. Выходом является функция реального курса $x = x(t)$. Цель настройки системы управления — добиться возможно меньшего рассогласования между $u(t)$ и $x(t)$.

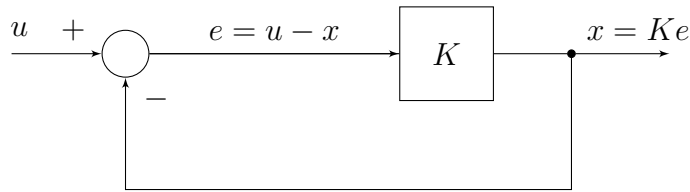


Рис. 1.1: Схематическое изображение отрицательной обратной связи

Включение отрицательной обратной связи (рис. 1.1) приводит к уравнению $x = K(u - x)$, из которого следует

$$x = \frac{K}{1 + K} u.$$

Выражение в правой части приближается к u при увеличении коэффициента K , поэтому задача управления для больших значений K приближенно решена.

Рассмотрим немного более сложную систему, представленную на рис. 1.2.

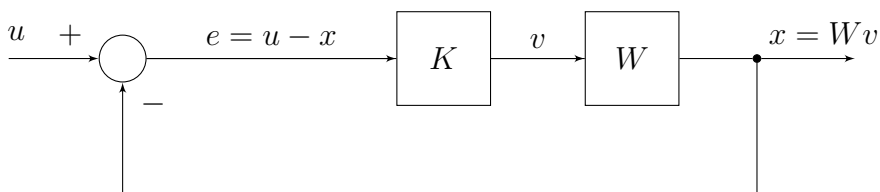


Рис. 1.2: Система управления объектом W

Отличие от первого случая состоит в выделении *неизменяемого* блока W . Можно считать, что символом W обозначен объект управления, а настра-

иваемым параметром регулятора является коэффициент K . Связь между выходом и входом имеет вид

$$x = \frac{KW}{1 + KW} u.$$

По-прежнему при больших значениях K выход объекта x близок к заданной функции u , и задачу управления можно считать приближенно решенной независимо от значения W , которое может быть и не известным.

Наконец, рассмотрим систему управления с двумя входными воздействиями — «лоцмана» (u) и «рулевого» (v) (см. рис. 1.3)².

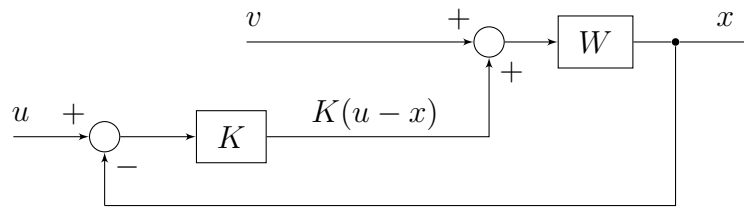


Рис. 1.3: Система управления объектом W с двумя входными воздействиями

Сигнал $K(u-x)$ из обратной связи можно рассматривать как коррекцию управляющего воздействия v с целью уменьшения отклонения $x-u$ выхода объекта W от «курса» u , заданного «лоцманом». Из соотношения

$$x = W(v + K(u - x))$$

следует, что связь между выходом и двумя входами дается уравнением

$$x = \frac{KW}{1 + KW} u + \frac{W}{1 + KW} v.$$

При увеличении K выход x приближается к сигналу «лоцмана» u , а сигнал «рулевого» v перестает влиять на выход объекта. В результате сигнал v можно рассматривать как возмущение, влияние которого на выход объекта нивелируется отрицательной обратной связью.

²Идею этого примера предложил В. Г. Казаков.

1.2 Линейные дифференциальные уравнения

Перейдем к случаю, когда связь между входом v и выходом x объекта управления W на рис. 1.2 описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = b_0v. \quad (1.1)$$

Здесь индекс в круглых скобках обозначает порядок производной:

$$x^{(i)} \doteq \frac{d^i}{dt^i}x(t).$$

Напомним порядок построения общего решения уравнения (1.1).

1. Сначала ищется общее решение $x_0(t)$ *однородного* уравнения

$$x_0^{(n)} + a_{n-1}x_0^{(n-1)} + \dots + a_0x_0 = 0 \quad (1.2)$$

подстановкой $x_0 = ce^{\lambda t}$, где $c, \lambda \in \mathbb{C}$ — комплексные числа. В результате при $c \neq 0$ приходим к уравнению

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (1.3)$$

которое называется *характеристическим уравнением* системы (1.1), а многочлен в левой части — *характеристическим многочленом*. Он всегда имеет n комплексных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Предположим, что все корни различны. Тогда общее решение однородного уравнения (1.2) есть множество функций

$$X_0 \doteq \{x_0(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}\}.$$

Пусть корень λ_1 имеет кратность $k > 1$, т. е. множество корней имеет вид

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \underbrace{\{\lambda_1, \dots, \lambda_1\}}_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

В этом случае общее решение состоит из функций вида

$$x_0(t) = (c_{11} + c_{12}t + \dots + c_{1k}t^{k-1})e^{\lambda_1 t} + c_{k+1}e^{\lambda_{k+1} t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \quad (1.4)$$

которые называются *квазимногочленами*. Аналогично выписывается общее решение, если есть и другие кратные корни.

2. На втором шаге ищется частное решение неоднородного уравнения (1.1). Это может быть любая (по возможности наиболее простая) функция, удовлетворяющая уравнению (1.1). Для примера пусть $b_0v(t) \equiv 1$. Тогда частным решением является константа $x_1(t) \equiv \text{const}$. Подстановка в уравнение (1.1) приводит к ответу $x_1(t) \equiv \frac{1}{a_0}$.

3. Общее решение неоднородного уравнения (1.1) есть множество функций

$$X = X_0 + x_1(t).$$

Пусть $x_2(t)$ — другое частное решение уравнения (1.1). Тогда разность $x_2(t) - x_1(t)$ является решением однородного уравнения (1.2) (проверьте подстановкой), и прибавление функции $x_2(t) - x_1(t)$ к множеству X_0 не изменяет этого множества:

$$X_0 + x_2(t) - x_1(t) = X_0.$$

Отсюда следует, что множества $X_0 + x_1(t)$ и $X_0 + x_2(t)$ совпадают:

$$X_0 + x_1(t) = X_0 + x_2(t) - x_1(t) + x_1(t) = X_0 + x_2(t).$$

Значит, в качестве частного решения можно брать любое решение неоднородного уравнения (1.1).

Действительные коэффициенты и решения

Рассмотрим уравнение (1.1) с действительными коэффициентами $a_i \in \mathbb{R}$. Выделим действительные решения $x(t) \in \mathbb{R}$.

Характеристический многочлен с действительными коэффициентами разлагается на сомножители с действительными коэффициентами степени не выше двух:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = \\ &= (\lambda^2 + p_1\lambda + p_0) \dots (\lambda^2 + q_1\lambda + q_0) \dots (\lambda + r_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что множество X_0 решений однородного уравнения (1.2) состоит из сумм решений уравнений степени не выше двух, поэтому для

понимания качественного характера поведения решений достаточно изучить уравнение второго порядка

$$x^{(2)} + a_1 x^{(1)} + a_0 x = 0, \quad a_{0,1} \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Его характеристический многочлен $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}.$$

Упражнение 1. Докажите, что при строго положительном дискриминанте $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 > 0$ общее действительное решение уравнения (1.6) представляет собой сумму двух экспонент с действительными показателями $\lambda_{1,2}t$ и коэффициентами $c_{1,2} \in \mathbb{R}$: $x_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Упражнение 2. Докажите, что при нулевом дискриминанте $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = 0$ общее действительное решение уравнения (1.6) есть квазимногочлен с действительным показателем λt у экспоненты и коэффициентами $c_{1,2} \in \mathbb{R}$: $x_0(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$.

Упражнение 3. Докажите, что при отрицательном дискриминанте $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 < 0$ общее действительное решение уравнения (1.6) имеет вид

$$x_0(t) = c_1 e^{(\alpha+i\omega)t} + c_2 e^{(\alpha-i\omega)t}, \quad c_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi}, \quad \rho, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Упражнение 4. Докажите, что общее решение $x_0(t)$ (1.7) всегда может быть представлено в виде

$$x_0(t) = 2\rho e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) = e^{\alpha t} (A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t), \quad A_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

(Указание: воспользуйтесь формулой Эйлера $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.)

Все возможные случаи качественного поведения действительных решений однородного уравнения (1.6) с действительными коэффициентами и некрратными корнями характеристического многочлена представлены на четырех рисунках³.

³Все рисунки в тексте выполнены с помощью пакетов TikZ, PGF системы L^AT_EX. См.: <http://www.texample.net/tikz/examples>.

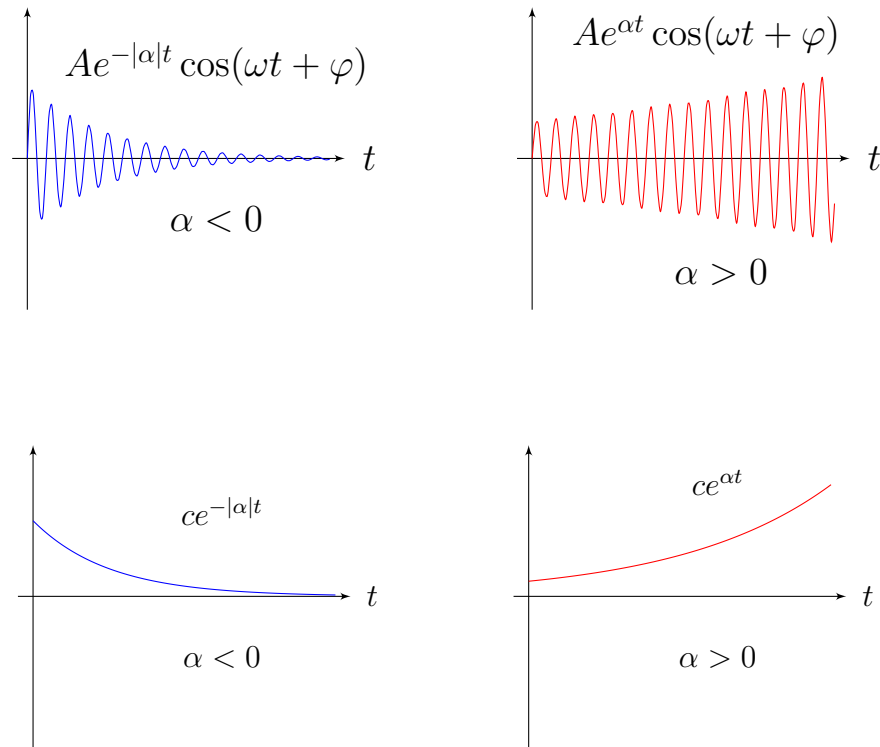


Рис. 1.4: Качественное поведение решений однородного уравнения второго порядка.

1.3 Устойчивость

Устойчивость является важнейшим свойством системы управления. Из рассмотренных примеров следует, что если реальная часть α какого-либо корня $\lambda = \alpha + i\omega$ характеристического уравнения строго положительна, то огибающая решения $ce^{\lambda t}$ экспоненциально растет со временем. Это пример неустойчивости. Неустойчивость технической системы приводит к катастрофе.

Определение 1. Система $x = \hat{W}u$ устойчива, если для любой ненулевой ограниченной функции входа $u(t)$, $|u(t)| \leq c_u < \infty$, функция выхода $x(t)$ ограничена: $|x(t)| \leq c_x < \infty$, $t \geq 0$. Система с нулевой входной функцией $u(t) \equiv 0$ устойчива, если функция выхода с ростом времени стремится к нулю $x(t) \rightarrow 0$.

Вместо устойчивости системы можно говорить об устойчивости ее уравнения. Исследование качественного поведения решений уравнения второго порядка приводит к важному выводу.

Утверждение 1. Для устойчивости *однородного* уравнения (1.2) необходимо и достаточно, чтобы у всех корней $\lambda = \alpha + i\omega$ характеристического многочлена реальная часть была строго меньше нуля: $\alpha < 0$.

Упражнение 5. Сформулируйте условие устойчивости однородного уравнения второго порядка (1.6) в виде условия на коэффициенты $a_{1,0}$. *Ответ:* $a_1 > 0$ и $a_0 > 0$.

В главе 3 будет показано, что для устойчивости неоднородного уравнения (1.1) также необходимо и достаточно, чтобы у всех корней его характеристического многочлена реальная часть была строго меньше нуля.

Пример. Рассмотрим неоднородное уравнение первого порядка $x^{(1)}(t) = 1$. Характеристический многочлен имеет единственный нулевой корень $\lambda = 0$. Уравнение имеет неограниченное решение $x_1(t) = t$, поэтому уравнение неустойчиво.

1.4 Операторная запись и сдвиг по времени

Введем обозначение для *оператора дифференцирования*: $\hat{s} \doteq \frac{d}{dt}$. Уравнение объекта (1.1) запишется в операторном виде:

$$(\hat{s}^n + a_{n-1}\hat{s}^{n-1} + \dots + a_0)x = b_0v$$

Символ W объекта управления на рис. 1.2 заменяется на символ *оператора* \hat{W} , действующего на функцию v :

$$\hat{W} = \frac{b_0}{(\hat{s}^n + a_{n-1}\hat{s}^{n-1} + \dots + a_0)}.$$

Формально по-прежнему $x = \hat{W}v$, но вместо умножения на число указан оператор, действующий на функцию в целом. Дробь в выражении для \hat{W} имеет смысл символической записи уравнения (1.1).

Определим оператор $\hat{\zeta}_\tau$ *сдвига по времени* на τ соотношением

$$\hat{\zeta}_\tau x(t) \doteq x(t + \tau).$$

Используя разложение в ряд Тейлора, выразим оператор сдвига $\hat{\zeta}_\tau$ через оператор дифференцирования:

$$\begin{aligned} x(t + \tau) &= x(t) + x^{(1)}(t)\tau + x^{(2)}(t)\frac{\tau^2}{2!} + x^{(3)}(t)\frac{\tau^3}{3!} + \dots \doteq \\ &\doteq \underbrace{\left(1 + \hat{s}\tau + \frac{\hat{s}^2}{2!}\tau^2 + \frac{\hat{s}^3}{3!}\tau^3 + \dots\right)}_{e^{\hat{s}\tau}} x(t). \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках совпадает с разложением в ряд экспоненты с показателем $\hat{s}\tau$ (если допустить существование такой экспоненты). Это позволяет использовать естественную краткую запись для оператора сдвига: $\hat{\zeta}_\tau \doteq e^{\hat{s}\tau}$.

Приемы анализа линейных систем с помощью исчисления операторов были разработаны во второй половине XIX в. О. Хевисайдом. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в главе 2.

1.5 Линеаризация

Рассмотрим систему, описываемую нелинейным дифференциальным уравнением

$$F(x^{(n)}(t), \dots, x^{(0)}(t), u^{(m)}(t), \dots, u^{(0)}(t), t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.8)$$

Предполагается, что функция $F(\cdot)$ дифференцируема по всем аргументам. Пусть пара функций $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ также удовлетворяет уравнению (1.8):

$$F(\tilde{x}^{(n)}(t), \dots, \tilde{x}^{(0)}(t), \tilde{u}^{(m)}(t), \dots, \tilde{u}^{(0)}(t), t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Определим функции отклонений:

$$\varepsilon(t) \doteq \tilde{x}(t) - x(t), \quad \omega(t) \doteq \tilde{u}(t) - u(t).$$

Поставим вопрос: какому уравнению подчиняются функции $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$? Если отклонения малы в определенном смысле, то ответ находится путем *линеаризации* уравнения (1.8).

Разложим функцию F в ряд Тейлора относительно значения аргументов

в точке t . Обозначим $a_i = a_i(t) \doteq \frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}$, $b_i = b_i(t) \doteq \frac{\partial F}{\partial u^{(i)}}$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}^{(n)}, \dots, \tilde{x}^{(0)}, \tilde{u}^{(m)}, \dots, \tilde{u}^{(0)}, t) &= \\ &= F(x^{(n)}, \dots, x^{(0)}, u^{(m)}, \dots, u^{(0)}, t) + \\ &\quad + a_n \varepsilon^{(n)} + \dots + a_0 \varepsilon^{(0)} + b_m \omega^{(m)} + \dots + b_0 \omega^{(0)} + R. \end{aligned}$$

Здесь R — остаточный член, стремящийся к нулю при уменьшении норм производных функций $\varepsilon(t)$ и $\omega(t)$. Учитывая уравнения (1.8) и (1.9), приходим к равенству

$$a_n \varepsilon^{(n)} + \dots + a_0 \varepsilon^{(0)} + b_m \omega^{(m)} + \dots + b_0 \omega^{(0)} + R = 0.$$

Это нелинейное уравнение является точным. Заменяем его линейным уравнением, отбросив остаточный член R :

$$a_n \varepsilon^{(n)} + \dots + a_0 \varepsilon^{(0)} + b_m \omega^{(m)} + \dots + b_0 \omega^{(0)} = 0. \quad (1.10)$$

Полученное уравнение уже не является точным следствием уравнений (1.8) и (1.9), но в определенном смысле оно близко к исходному уравнению (1.8). *Линеаризованное уравнение* (1.10) описывает отклонения, которые связывают любые две пары функций $x(t)$, $u(t)$ и $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$, удовлетворяющие уравнению (1.8), в малой окрестности $x(t)$, $u(t)$.

Упражнение 6. Выполните линеаризацию уравнения

$$x^{(1)}(t) + x^2(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

вблизи решения $x(t) = \frac{1}{t+100}$. *Ответ:* $\varepsilon^{(1)}(t) + \left(\frac{2}{t+100}\right) \varepsilon(t) = 0$.

Определение 2. Линейное уравнение (1.10) называется *стационарным* (автономным), если его коэффициенты a_i , b_i не зависят от времени.

Пример. Линейное уравнение $\varepsilon^{(1)}(t) + \left(\frac{2}{t+100}\right) \varepsilon(t) = 0$ при малом изменении времени $t \in (0, T)$, $T \ll 100$, может быть приближенно заменено стационарным уравнением $\varepsilon^{(1)}(t) + \frac{2}{100} \varepsilon(t) = 0$. Его общее решение имеет вид $\varepsilon(t) = ce^{-2t/100}$, $c \in \mathbb{R}$.

1.6 Исторические замечания

Первым, кто свел задачу анализа устойчивости регулятора к изучению расположения корней характеристического многочлена (путем исследования малых колебаний и линеаризации), был Дж. К. Максвелл. В статье 1868 г. «О регуляторах» [3] (продолжающей его более ранние исследования об устойчивости колец Сатурна) Дж. К. Максвелл поставил вопрос о получении условий на коэффициенты многочлена, необходимых и достаточных для устойчивости. Он писал: «Я не в состоянии определить полностью эти условия для уравнения выше третьей степени, но я надеюсь, что этот вопрос привлечет внимание математиков». Искомые условия устойчивости для многочленов были получены Э. Дж. Раусом в 1876 г.

Применение теории устойчивости регуляторов в промышленности началось после работ И. А. Вышнеградского 1876–77 гг. [3]. Он исследовал динамику паровой машины с регулятором Уатта, описав ее существенные особенности уравнением 3-го порядка и сформулировав условия устойчивости в удобном для расчетов виде. Линеаризованная теория для анализа составных регуляторов непрямого действия, применяемых для управления большими турбинами, была создана словацким инженером Аурелем Стодолой в 1893–1894 гг. [3]. Еще не зная исследований Дж. К. Максвелла и Э. Дж. Рауса, А. Стодола обратился к своему товарищу А. Гурвицу с просьбой найти условия устойчивости корней произвольного многочлена степени n . Такие условия в удобной детерминантной форме были получены в 1893 г. Они известны как условия Рауса—Гурвица (глава 3).

1.7 Регулятор Уатта

Применим рассмотренные выше понятия к анализу системы управления скоростью вращения вала паровой машины (регулятора Уатта).

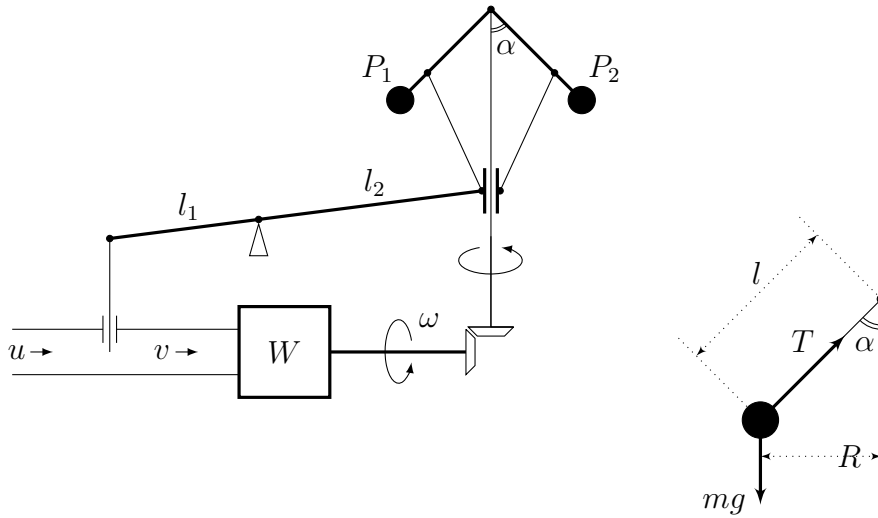


Рис. 1.5: Схема регулятора Уатта

На рис. 1.5 блок W обозначает паровую машину, на вход которой подается пар с интенсивностью v кг/с. Подача пара регулируется заслонкой, которая изменяет интенсивность подачи пара с величины u на выходе парового котла до величины v на входе паровой машины. Угловая скорость ω вращения вала машины пропорциональна интенсивности подачи пара⁴:

$$\omega = Wv.$$

Вращение вала машины передается на карусель из двух грузов P_1 и P_2 , которые при увеличении угловой скорости из-за центробежной силы приподнимаются и через рычаг с плечами l_1 , l_2 прикрывают заслонку, уменьшая подачу пара. Так осуществляется отрицательная обратная связь, регулирующая угловую скорость вращения.

Составим уравнение, приближенно описывающее паровую машину с регулятором Уатта. Равновесием будем считать вращательное движение грузов карусели с постоянной угловой скоростью ω и постоянным углом наклона α . Из второго закона Ньютона для вертикальных и горизонтальных проекций силы натяжения T и силы тяжести mg , действующих на груз (рис. 1.5),

⁴Более точным будет уравнение первого порядка $J_1\omega^{(1)} + k\omega = W_2v$.

получаем равенства

$$\begin{aligned} T \cos \alpha &= mg, \\ T \sin \alpha &= mR\omega^2 = m(l \sin \alpha)\omega^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение равновесного вращения карусели:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{l}{g}\omega^2.$$

При малых изменениях $\Delta\alpha$, $\Delta\omega$ угла α и угловой скорости ω уравнение равновесного вращения посредством разложения обеих частей в ряд Тейлора до линейных членов заменяется на приближенное линейное соотношение:

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)_{\alpha}^{(1)} \Delta\alpha \simeq \frac{l}{g}\omega^2 + \left(\frac{l}{g}\omega^2\right)_{\omega}^{(1)} \Delta\omega.$$

Отсюда следует приближенное равенство

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)_{\alpha}^{(1)} \Delta\alpha \simeq \left(\frac{l}{g}\omega^2\right)_{\omega}^{(1)} \Delta\omega,$$

которое запишем в виде

$$\Delta\alpha \simeq W_1 \Delta\omega. \quad (1.11)$$

Здесь $\Delta\alpha$, $\Delta\omega$ есть приращения, связывающие между собой два равновесных состояния, характеризуемые парами величин α , ω и $\alpha + \Delta\alpha$, $\omega + \Delta\omega$. Обратим внимание на неотрицательность величины $W_1 > 0$, обусловленную тем, что увеличение скорости вращения должно приводить к *увеличению* угла α .

Теперь заметим, что уравнение (1.11) допускает любые скорости изменения входящих в него величин, т.е. никак не учитывает физическую инертность грузов карусели регулятора. Для точного описания *переходных процессов* между равновесными состояниями нужно включить в уравнение производные приращения $\Delta\alpha$:

$$I(\Delta\alpha)^{(2)} + \beta(\Delta\alpha)^{(1)} + \Delta\alpha \simeq W_1 \Delta\omega. \quad (1.12)$$

В равновесном состоянии производные $(\Delta\alpha)^{(2)}$ и $(\Delta\alpha)^{(1)}$ обращаются в ноль,

и получается уравнение (1.11). Коэффициент I при второй производной характеризует инертность карусели регулятора, а коэффициент β — так называемое вязкое трение. Чем более густая смазка в шарнирах карусели, тем больше коэффициент β .

Действие рычага обратной связи на задвижку подачи пара опишем уравнением

$$\Delta v(t) = \Delta u(t) - K\Delta\alpha(t - \tau).$$

Здесь $K \sim l_1/l_2$ (с точностью до умножения на константу), а τ есть небольшое время задержки, вызванное зазорами в подвижных соединениях обратной связи. С учетом соотношения $\omega = Wv$ получаем приближенное уравнение регулятора:

$$I(\Delta\alpha)^{(2)} + \beta(\Delta\alpha)^{(1)} + \Delta\alpha = W_1W[\Delta u(t) - K\Delta\alpha(t - \tau)].$$

В операторной форме —

$$[I\hat{s}^2 + \beta\hat{s} + 1]\Delta\alpha = W_1W[\Delta u(t) - K\Delta\alpha(t - \tau)].$$

При малых задержках τ оператор сдвига по времени $e^{-\hat{s}\tau}$ заменяется приближенным выражением $1 - \hat{s}\tau$, и получается линеаризованное уравнение регулятора:

$$[I\hat{s}^2 + (\beta - W_1WK\tau)\hat{s} + (1 + W_1WK)]\Delta\alpha = W_1W\Delta u. \quad (1.13)$$

Устойчивость исследуется так же, как и для уравнения (1.6). Коэффициенты характеристического многочлена имеют вид

$$a_1 = \frac{\beta - W_1WK\tau}{I}, \quad a_0 = \frac{1 + W_1WK}{I}.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости уравнения (1.13) есть строгая положительность обоих коэффициентов $a_{1,0}$ (упражнение 5). Учитывая положительность коэффициента I (напомним, он характеризует момент инерции грузов) и положительность величин W_1 , W , K , получаем следую-

щий критерий устойчивости:

$$\beta > W_1 W K \tau.$$

Несмотря на приближенность модели регулятора⁵, полученный критерий устойчивости имеет физический смысл. Из него вытекает следующий рецепт сохранения устойчивости.

1. Следить, чтобы время задержки τ было незначительным (не допускать износа и зазоров подвижных соединений в регуляторе).
2. Сохранять большое значение коэффициента вязкого трения β (выбирать сорт смазки).
3. Не допускать больших значений $K \sim l_1/l_2$ в рычаге обратной связи.

Заметим, что все три условия далеко не очевидны. Более того, последнее условие прямо противоречит «интуиции», которая побуждает сделать регулятор более чувствительным к изменению угловой скорости ω , то есть *увеличить* коэффициент $K \sim l_1/l_2$ (см. примеры в разделе 1.1).

1.8 Система управления велосипедом

Уравнение движения велосипеда имеет вид⁶:

$$y^{(2)}(t) - \alpha_1 y(t) = \alpha_2 v(t - \tau) + \alpha_3 v^{(1)}(t - \tau),$$

где $y(t)$ — угол отклонения рамы велосипеда от вертикальной плоскости, $v(t)$ — угол поворота руля, $\alpha_1 = gh^{-1}$, $\alpha_2 = V^2 h^{-1} c^{-1}$, $\alpha_3 = lVh^{-1}c^{-1}$, τ — запаздывание в управлении, V — скорость движения, g — ускорение свободного падения, l, h — координаты центра масс, c — база велосипеда (см. рис. 1.6). Уравнение обратной связи: $v(t) = -y(t)$.

⁵Если вместо уравнения $\omega = Wv$ использовать уравнение $J_1 \omega^{(1)} + k\omega = W_2 v$, получится регулятор не второго, а третьего порядка. Для наших целей достаточно ограничиться рассмотренным приближением.

⁶Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем / Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. М: «Наука», 1967. С. 250.

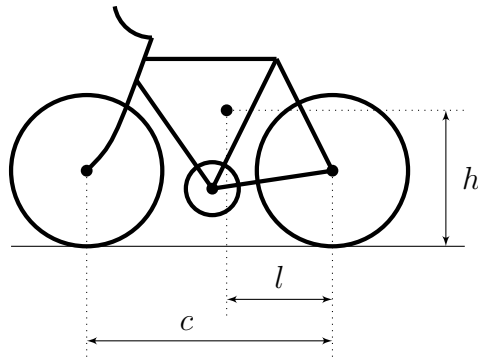


Рис. 1.6: Параметры модели велосипеда

Упражнение 7. Получите условия устойчивости системы управления велосипедом. *Ответ:* $\frac{\alpha_3 - \alpha_2 \tau}{1 - \alpha_3 \tau} > 0$ и $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_3 \tau} > 0$. Исследуйте зависимость условий устойчивости от скорости V , времени задержки (реакции велосипедиста) τ и параметров c, l, h .

Упражнение 8. Исследуйте условия устойчивости системы управления велосипедом с обратной связью $v(t) = -Ky(t)$. При каких значениях коэффициента усиления K система управления остается устойчивой? Кто чаще падает с велосипеда — «холерик» (большой K) или «меланхолик» (маленький K)?

1.9 Линейные системы и принцип суперпозиции

Предположим, что из уравнения (1.8) при заданных начальных условиях $x(0), x^{(1)}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ по функции $u(t)$ однозначно вычисляется функция $x(t), t \geq 0$. Будем писать $x = \hat{W}[u]$, где символ \hat{W} обозначает *оператор системы*, действующий на функцию входа $u(t) \in \mathbb{R}$ и дающий в результате функцию выхода $x(t) \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Когда речь идет о функции в целом, а не о ее конкретном значении, обозначение аргумента может опускаться или заменяться точкой: $x(\cdot)$.

Оператор \hat{W} называется *линейным*, если выполнены следующие условия.

1. $\hat{W}[0(\cdot)] = 0(\cdot)$.
2. $\hat{W}[\alpha u(\cdot) + \beta v(\cdot)] = \alpha \hat{W}[u(\cdot)] + \beta \hat{W}[v(\cdot)], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Здесь $0(\cdot)$ обозначает тождественно нулевую функцию.

Примерами линейных операторов являются операторы дифференцирования и интегрирования

$$\hat{s}[x(\cdot)] \doteq x^{(1)}(\cdot), \quad \hat{i}[x(\cdot)](t) \doteq \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Упражнение 9. Докажите утверждения.

1. Суперпозиция линейных операторов является линейным оператором. В частности, оператор n -кратного дифференцирования \hat{s}^n — линейный.

2. Линейная комбинация линейных операторов является линейным оператором. В частности, $\hat{W} = a_n \hat{s}^n + a_{n-1} \hat{s}^{n-1} + \dots + a_0$ — линейный оператор.

3. При условии $x(0) = 0, x^{(1)}(0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(0) = 0$ линейный оператор $\hat{W} = a_n \hat{s}^n + a_{n-1} \hat{s}^{n-1} + \dots + a_0$ перестановочен с операторами дифференцирования и интегрирования: $\hat{W}[\hat{s}x] = \hat{s}[\hat{W}x], \hat{W}[\hat{i}x] = \hat{i}[\hat{W}x]$. *Указание:* сначала докажите перестановочность операторов \hat{s}^n и \hat{i} .

Утверждение 2. (Принцип суперпозиции.) Пусть дано уравнение

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x(t) = u(t), \quad (1.14)$$

и две пары его решений⁷ $x_1(t), u_1(t)$ и $x_2(t), u_2(t)$:

$$\begin{aligned} a_n x_1^{(n)}(t) + \dots + a_0 x_1(t) &= u_1(t), \\ a_n x_2^{(n)}(t) + \dots + a_0 x_2(t) &= u_2(t). \end{aligned}$$

Тогда пара функций $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ и $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$, $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$, является решением уравнения (1.14).

Это утверждение доказывается прямой подстановкой. Аналогичное утверждение имеет место для уравнения

$$\hat{W}_a x(t) = \hat{W}_b u(t),$$

где $\hat{W}_{a,b}$ — линейные операторы (проверьте самостоятельно).

Согласно принципу суперпозиции, если удастся разложить правую часть $u(t)$ уравнения (1.14) на сумму функций, для которых известны частные

⁷Заметим, что решением называем *пару* функций входа и выхода.

решения, то решение уравнения находится суммированием уже известных решений.

Применение принципа суперпозиции к уравнениям, содержащим производные функции $u(t)$ правой части, основано на следующем утверждении.

Утверждение 3. Дифференциальное уравнение

$$[a_n \hat{s}^n + \dots + a_0 \hat{s}^0] x(t) = [b_m \hat{s}^m + \dots + b_0 \hat{s}^0] u(t)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = 0$$

задает линейный оператор

$$\hat{W} : u(\cdot) \rightarrow x(\cdot). \quad (1.15)$$

Упражнение 10. Докажите утверждение 3 с помощью принципа суперпозиции и свойств линейных операторов из упражнения 9.

Упражнение 11. Докажите, что оператор \hat{W} (1.15) коммутирует с операторами дифференцирования и интегрирования.

Рассмотрим два типа функций, на суммы которых обычно раскладывают функции в правой части.

1. Функция Хэвисайда (рис. 1.7): $1(t) \doteq \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

2. Импульс единичной энергии (дельта-функция⁸) (рис. 1.7):

$$\delta(t) \doteq \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1(t).$$

Чтобы избежать вопроса о корректности данного определения дельта-функции,

⁸Дельта-функция впервые введена О. Хевисайдом, см.
http://vivovoco.astronet.ru/VV/BOOKS/HEAVISIDE/CHAPTER_09.HTM.

можно рассмотреть непрерывные функции

$$1_a(t) \doteq \begin{cases} 1, & t \geq a, \\ \frac{1}{a}t, & 0 \leq t < a, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \delta_a(t) \doteq \begin{cases} 0, & t \geq a, \\ \frac{1}{a}, & 0 \leq t < a, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Соотношение $\int_{-\infty}^t \delta_a(\tau) d\tau = 1_a(t)$ остается в силе. Для приближения к функции Хэвисайда и дельта-функции достаточно устремить параметр a к нулю.

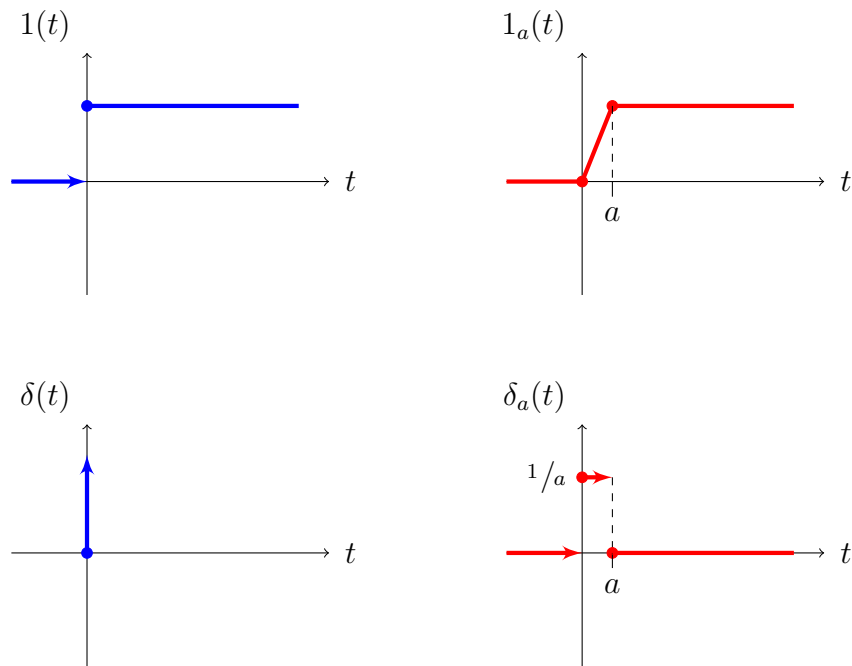


Рис. 1.7: Функция Хэвисайда и дельта-функция

Ступенчатый сигнал всегда можно разложить на сумму функций Хэвисайда (рис. 1.8).

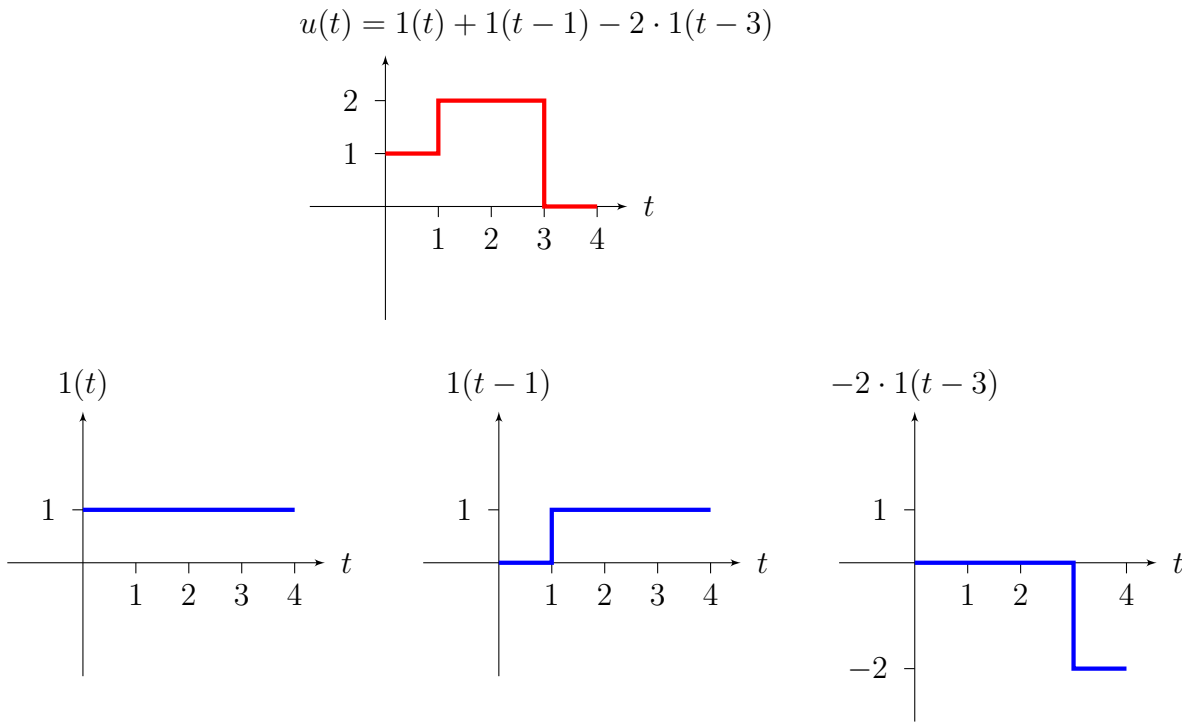


Рис. 1.8: Разложение ступенчатого сигнала на функции Хэвисайда

Гладкий сигнал может быть приближенно представлен ступенчатым (рис. 1.9).

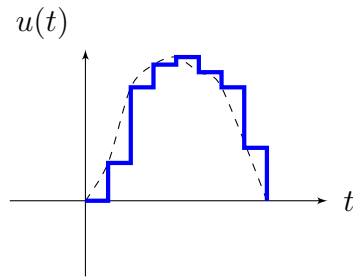


Рис. 1.9: Приближенное представление гладкого сигнала ступенчатым

Вычислим отклики на элементарные входные воздействия для системы с нулевыми начальными условиями \hat{W} (1.15).

Определение 3. Отклик системы \hat{W} (1.15) на функцию Хэвисайда $1(t)$ называется *переходной характеристикой* и обозначается $h(t) \doteq \hat{W}[1(t)]$. Отклик системы \hat{W} (1.15) на дельта-функцию $\delta(t)$ называется *импульсной функцией* и обозначается $w(t) \doteq \hat{W}[\delta(t)]$.

Утверждение 4. Переходная характеристика и импульсная функция связа-

ны соотношениями

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau, \quad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Доказательство. Используя определение 3 и свойства линейного оператора \hat{W} (1.15) (упражнение 11), получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} h(t) &= \hat{W}[1(t)] = \hat{W} \left[\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \right] = \\ &= \int_{-\infty}^t \hat{W}[\delta(\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. \square

Установим вспомогательное утверждение, которое можно назвать «разложением на дельта-функции».

Лемма 1. Пусть функция $u(t)$ определена на всей числовой оси $t \in (-\infty, \infty)$, ограничена $|u(t)| < c$ и существуют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) \doteq u(\pm\infty)$. Тогда

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_a^b uv^{(1)} + \int_a^b u^{(1)}v = uv \Big|_a^b.$$

Функция $v^{(1)}(\tau) = \delta(t - \tau)$ имеет интеграл $v(\tau) = -1(t - \tau)$. Верны равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &= \\ &= u(\tau) [-1(t - \tau)] \Big|_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u^{(1)}(\tau) [-1(t - \tau)] d\tau = \\ &= -u(\infty) \cdot 0 + u(-\infty) \cdot 1 + \int_{-\infty}^t u^{(1)}(\tau) d\tau = \\ &= u(-\infty) + u(t) - u(-\infty) = u(t). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Эта лемма позволяет выразить выход линейной системы \hat{W} (1.15) через

функцию входа и импульсную функцию с помощью *интеграла свертки*.

Определение 4. *Сверткой* функций $u(\cdot)$, $w(\cdot)$ называется выражение

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)w(t - \tau)d\tau.$$

Для операции свертки принято обозначение: $x = u * w$, $x(t) \doteq [u * w](t)$.

Утверждение 5. Операция свертки перестановочна: $u * w = w * u$. Если функции u , w отличны от нуля только на положительной полуоси ($u(t < 0) = 0$, $w(t < 0) = 0$), то интеграл свертки имеет конечные пределы:

$$\begin{aligned} [u * w](t) &= \int_0^t u(\tau)w(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_0^t w(\tau)u(t - \tau)d\tau = [w * u](t). \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство сразу следует из условия равенства нулю функций u , w при отрицательных значениях аргумента. Докажем второе равенство (перестановочность свертки), сделав замену переменных $\mu = t - \tau$:

$$\int_0^t u(\tau)w(t - \tau)d\tau = \int_t^0 u(t - \mu)w(\mu)d(-\mu) = \int_0^t w(\mu)u(t - \mu)d\mu.$$

Утверждение доказано. □

Утверждение 6. Для системы \hat{W} (1.15) верно соотношение:

$$x(t) = \hat{W}u(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)w(t - \tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)w(t - \tau)d\tau. \quad (1.17)$$

Доказательство. По лемме 1

$$x(t) = \hat{W}u(\cdot) = \hat{W} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

Оператор \hat{W} действует на функцию аргумента t , поэтому можно внести его под знак интеграла и воспользоваться определением импульсной функции:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\hat{W}[\delta(t - \tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)w(t - \tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)w(t - \tau)d\tau.$$

Утверждение доказано. □

Операция свертки с бесконечными пределами используется при расчете оптических устройств. Пусть функция $u(\cdot)$ на входе описывает яркость одномерного источника в зависимости от координаты. Тогда функция $x(\cdot)$ описывает яркость получаемого изображения. Импульсная функция $w(t)$ называется *аппаратной функцией* прибора, она соответствует изображению, которое создается от яркой точки, расположенной в начале координат ($u(\cdot) = \delta(\cdot)$). Лемма 1 описывает идеальный прибор, который изображает яркие точки без «размазывания». В этом идеальном случае $w(\cdot) = \delta(\cdot)$, поэтому функция яркости источника $u(\cdot)$ передается через прибор без искажений: $x(\cdot) = \hat{W}u(\cdot) = u(\cdot)$. Интеграл свертки позволяет построить изображение предмета, составленного из разных точек с различными яркостями, на выходе оптической системы с аппаратной функцией $w(\cdot)$. Чем более «нерезким» является прибор, тем сильнее его аппаратная функция отличается от дельта-функции. При расчете оптических систем аргумент функций $x(\cdot)$, $w(\cdot)$, $u(\cdot)$ представляет собой пространственную переменную, принимающую значения на всей числовой оси \mathbb{R} . Для динамических линейных систем аргументом функций является время t с областью определения $t \geq 0$.

1.10 Регуляторы

Выше был рассмотрен простейший регулятор, состоящий из одного звена усилителя с коэффициентом K (рис. 1.2, 1.10). Он называется пропорциональным (П-) регулятором.

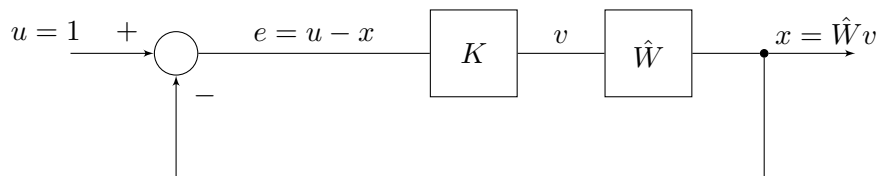


Рис. 1.10: П-регулятор

Настройка П-регулятора осуществляется подбором коэффициента K с целью обеспечить близость функций выхода $x(\cdot)$ и входа $u(\cdot)$. В качестве входной функции $u(\cdot)$ обычно берется функция Хевисайда $1(\cdot)$. В соответствии с принципом суперпозиции регулятор, настроенный по функции Хевисайда,

будет работать в определенных пределах и при более сложных входных воздействиях. Если $u(\cdot) = 1(\cdot)$, необходимым условием является сходимость $x(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Как минимум замкнутая система управления должна быть устойчивой.

Эвристическая настройка по Никольсу—Циглеру

1. На первом шаге подбором коэффициента K находится граница устойчивости замкнутой системы с регулятором. Эта граница определяется по наличию периодических колебаний с постоянной амплитудой на выходе регулятора $x(t)$ (см. рис. 1.11). Полученное значение коэффициента обозначается $K_{\text{крит}}$.

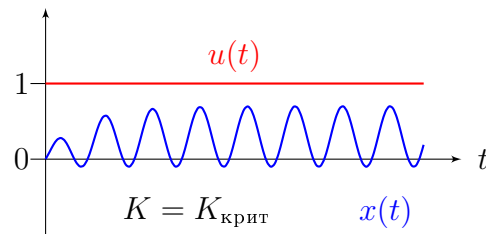


Рис. 1.11: Пример функции на выходе П-регулятора на границе устойчивости

2. Согласно эвристическому правилу Никольса—Циглера, для устойчивой работы П-регулятора следует принять

$$K \doteq K_{\text{Н}} = 0.5K_{\text{крит}}.$$

Рассмотрим простой случай, для которого можно объяснить это эвристическое правило выбора K . Пусть регулируемый объект описывается оператором

$$\hat{W} = \frac{e^{-\tau\hat{s}}}{\hat{s}}.$$

Считая время задержки малым ($\tau \ll 1$), напишем дифференциальное уравнение объекта:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{-\tau\hat{s}}}{\hat{s}}v & \Leftrightarrow & \hat{s}x = e^{-\tau\hat{s}}v & \Rightarrow \\ x^{(1)} &\simeq \left(1 - \tau\hat{s} + \frac{\tau^2}{2}\hat{s}^2\right)v = v - \tau v^{(1)} + \frac{\tau^2}{2}v^{(2)}. \end{aligned}$$

С учетом обратной связи $v = K(1 - x)$ получаем уравнение замкнутой системы

$$x^{(1)} = K(1 - x) + \tau K x^{(1)} - \frac{\tau^2}{2} K x^{(2)}.$$

Если $K = 0$, уравнение имеет вид $x^{(1)} = 0$ с решением $x = \text{const}$. При $K \neq 0$ после приведения подобных слагаемых и нормирования коэффициентов приходим к уравнению

$$x^{(2)} + \underbrace{\left(\frac{1 - \tau K}{\frac{\tau^2}{2} K} \right)}_{a_1} x^{(1)} + \underbrace{\left(\frac{K}{\frac{\tau^2}{2} K} \right)}_{a_0} x = \left(\frac{K}{\frac{\tau^2}{2} K} \right).$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости решений уравнения является строгая положительность коэффициентов $a_{0,1}$ (упражнение 5), что равносильно одновременному выполнению условий $1 - \tau K > 0$ и $K > 0$. Критическое значение $K_{\text{крит}}$ на границе устойчивости определяется из уравнения $1 - \tau K_{\text{крит}} = 0$. Тогда областью устойчивости регулятора является отрезок $K \in (0, \frac{1}{\tau}) = (0, K_{\text{крит}})$. Таким образом, правило Никольса—Циглера $K \doteq K_{\text{Н}} = 0.5 K_{\text{крит}}$ обеспечивает попадание величины $K_{\text{Н}}$ в середину интервала устойчивости.

ПИ-регулятор

Более сложным является ПИ-регулятор (пропорционально-интегрирующий), который получается добавлением к П-регулятору звена интегрирования $\frac{1}{T_{\text{и}} \hat{s}}$ (рис. 1.12).

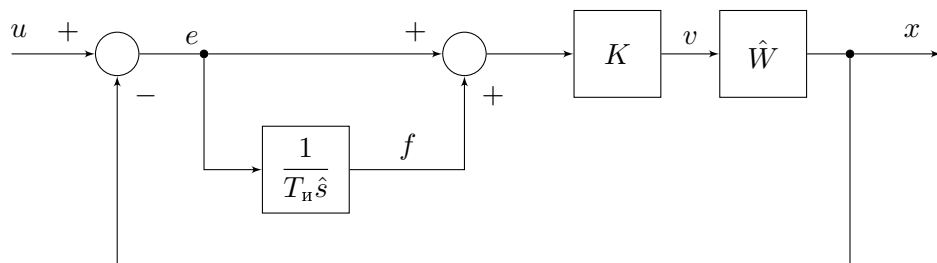


Рис. 1.12: ПИ-регулятор

Операторное уравнение $f = \left(\frac{1}{T_{\text{и}} \hat{s}} \right) e$ записывается через интеграл:

$f(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$. Получаем уравнение для звена регулирования:

$$v = K \left(1 + \frac{1}{T_i \hat{s}} \right) e, \quad v(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right).$$

ПИ-регулятор имеет два параметра настройки: K, T_i .

Настройка ПИ-регулятора по Никольсу—Циглеру состоит из трех шагов.

1. Отключается звено интегрирования, и для полученного П-регулятора подбором коэффициента K находится граница устойчивости $K = K_{\text{крит}}$.

2. Измеряется период колебаний $T_{\text{крит}}$ на границе устойчивости (рис. 1.13).

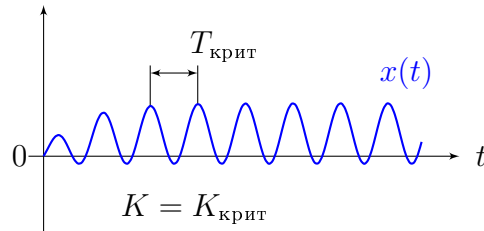


Рис. 1.13: Период колебаний регулятора на границе устойчивости

3. Восстанавливается звено интегрирования. Для устойчивой работы ПИ-регулятора следует принять

$$K \doteq K_{\text{Н}} = 0.45K_{\text{крит}},$$

$$T_i \doteq T_{\text{и,Н}} = \frac{T_{\text{крит}}}{1.2}.$$

ПИД-регулятор

После добавления к ПИ-регулятору звена дифференцирования $\frac{T_d \hat{s}}{1 + T_c \hat{s}}$ получим ПИД-регулятор (пропорционально-интегро-дифференцирующий) (рис. 1.14).

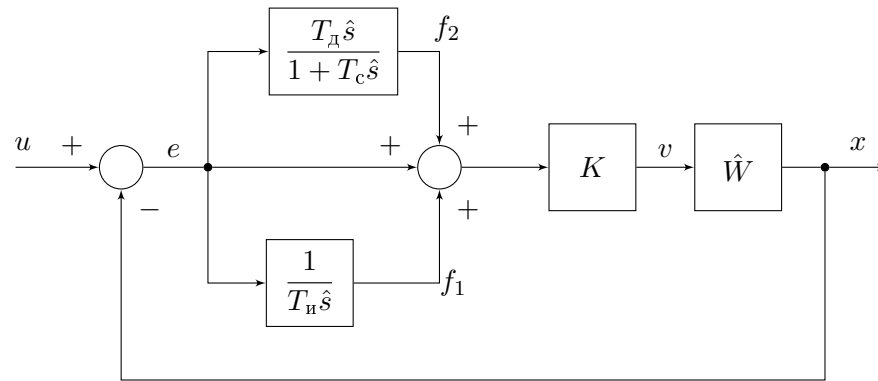


Рис. 1.14: ПИД-регулятор

Операторное уравнение для звена дифференцирования имеет вид

$$f_2 = \left(\frac{T_d \hat{s}}{1 + T_c \hat{s}} \right) e.$$

Запись этого звена в виде дифференциального уравнения представляет собой

$$f_2(t) + T_c f_2^{(1)}(t) = T_d e^{(1)}(t).$$

Операторное уравнение для всего регулятора:

$$v = K \left(1 + \frac{1}{T_i \hat{s}} + \frac{T_d \hat{s}}{1 + T_c \hat{s}} \right) e.$$

При $T_c = 0$ несложно получить запись регулятора в виде интегро-дифференциального уравнения:

$$v(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d e^{(1)}(t) \right).$$

Для настройки ПИД-регулятора обычно используются два параметра K, T_i . Остальные параметры (T_d, T_c) вычисляются по заранее заданному правилу.

Эвристическая настройка ПИД-регулятора по Никольсу—Циглеру состоит в следующем.

1. Отключаются звенья интегрирования и дифференцирования, и для полученного П-регулятора подбором коэффициента K находится граница устойчивости $K = K_{\text{крит}}$.
2. Измеряется период колебаний $T_{\text{крит}}$ на границе устойчивости (рис. 1.13).
3. Восстанавливаются звенья интегрирования и дифференцирования. Для

устойчивой работы ПИД-регулятора следует принять

$$K = 0.6K_{\text{крит}}, \quad T_{\text{и}} = \frac{T_{\text{крит}}}{2}, \quad T_{\text{д}} = \frac{T_{\text{и}}}{4}, \quad T_{\text{с}} = \frac{T_{\text{д}}}{8}. \quad (1.18)$$

Подчеркнем, что настройка по Никольсу—Циглеру обеспечивает только устойчивость системы регулирования. Возможны и другие способы получения устойчивых регуляторов.

Интегральный критерий качества

Среди устойчивых регуляторов можно выбрать в некотором смысле наилучший. Введем интегральный критерий качества регулирования на временном интервале $(0, T)$:

$$\varepsilon(T) \doteq \int_0^T |e(\tau)| d\tau, \quad e(t) \doteq x(t) - u(t) = x(t) - 1.$$

Ошибка регулирования описывается функцией $e(t)$.

Интегральной ошибкой называется интеграл от модуля ошибки регулирования на интервале наблюдения (см. рис. 1.15).

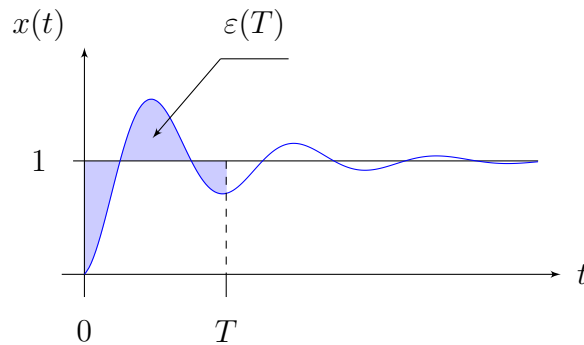


Рис. 1.15: Интегральная ошибка регулирования

За показатель качества регулятора принимается предельное значение $\varepsilon_{\infty} \doteq \varepsilon(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon(T)$.

Упражнение 12. Покажите, что если объект управления \hat{W} описывается линейным дифференциальным уравнением конечного порядка и имеет место устойчивость регулятора, то значение ε_{∞} интегральной ошибки конечно. *Указание:* следует учесть, что функция ошибки является решением устойчи-

вого линейного дифференциального уравнения конечного порядка; все такие решения экспоненциально затухают на бесконечности, и поэтому они интегрируемы.

Оптимальная настройка ПИ-регулятора

Зависимость $\varepsilon_\infty(K, T_i)$ в общем случае определяется экспериментально. Минимум интегральной ошибки ищется одним из методов параметрической оптимизации. В простых случаях можно использовать метод покоординатного спуска:

1. Выбирается начальное приближение, например, по правилу Никольса—Циглера

$$\left(K^{[0]}, T_i^{[0]} \right) = (K_N, T_{i,N}).$$
2. При фиксированном значении второго параметра улучшается значение первого: $K^{[1]} = \arg \min_K \varepsilon_\infty(K, T_i^{[0]})$.
3. При фиксированном значении первого параметра улучшается значение второго: $T_i^{[1]} = \arg \min_T \varepsilon_\infty(K^{[1]}, T)$.
4. Шаги 2 и 3 повторяются.

Упражнение 13. Опишите алгоритм настройки ПИ-регулятора градиентным методом.

Оптимальная настройка ПИД-регулятора

ПИД-регулятор зависит от четырех величин K, T_i, T_d, T_c . Обычно настройка осуществляется только по двум параметрам K, T_i , а коэффициенты T_d, T_c на каждом шаге вычисляются по заранее указанным эмпирическим формулам, например (1.18).

Каскадные регуляторы

Одним из типовых звеньев сложных составных регуляторов является *рулевая машинка* — электродвигатель, охваченный петлей отрицательной обратной связи с П- или ПИ-регулятором (рис. 1.16).

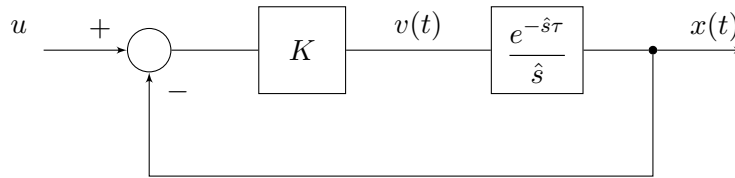


Рис. 1.16: Рулевая машинка

Оператор $\hat{W} = \frac{e^{-s\tau}}{\hat{s}}$ моделирует электрический мотор. Функция $x(t)$ описывает угол поворота вала мотора. При постоянном напряжении $v(t) = v_0$ на входе вал мотора вращается и угол поворота $x(t)$ монотонно растет. Этот рост приближенно описывается линейной функцией с производной v_0 , поэтому в модели мотора есть оператор интегрирования $\frac{1}{\hat{s}}$. Оператор задержки $e^{-s\tau}$ моделирует инертность вала (постепенную раскрутку) (рис. 1.17).

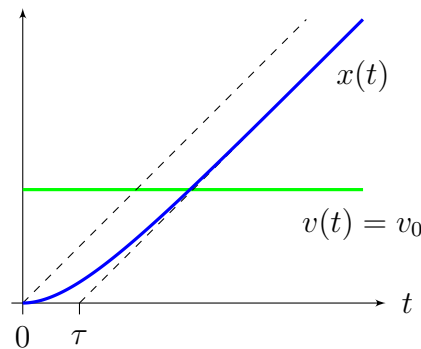


Рис. 1.17: Вращение вала электромотора без обратной связи

Добавление обратной связи с правильно настроенным параметром K регулятора приводит к тому, что вал не вращается постоянно, а останавливается в положении $x(t) = u$. Изменение значения u на входе рулевой машинки приводит к новому положению вала мотора. Вместе с ним принимают новое положение и связанные с этим валом управляющие механизмы (заслонки, рули и т. п.).

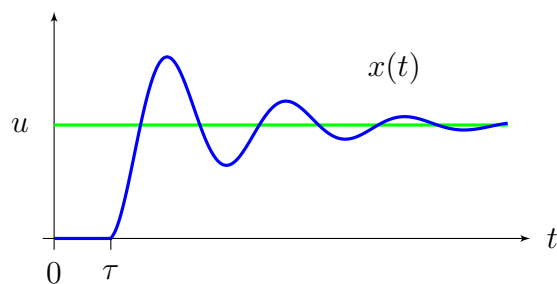


Рис. 1.18: Вращение вала электромотора с обратной связью

Приведем пример составного регулятора с рулевой машинкой. Вместо машинки могут быть более сложные звенья. Такие регуляторы еще называют *каскадными*.

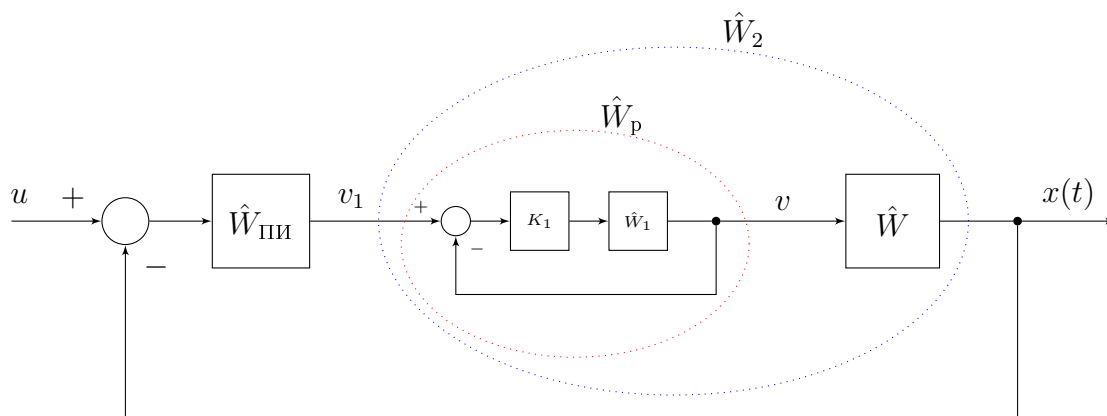


Рис. 1.19: Пример каскадного регулятора

На рисунке 1.19 изображен ПИ-регулятор

$$\hat{W}_{\text{ПИ}} = K \left(1 + \frac{1}{T_{\text{И}} \hat{s}} \right)$$

для управления объектом \hat{W} с помощью рулевой машинки $\hat{W}_{\text{р}}$. Параметрами настройки являются параметры $K, T_{\text{И}}$ внешнего ПИ-регулятора и параметр K_1 рулевой машинки.

Более сложные каскадные регуляторы получаются добавлением внешних регулирующих звеньев и обратных связей.

Настройка каскадного регулятора:

1) настраивается внутренний регулятор (параметр K_1) при отключенных внешних связях;

2) при найденном значении параметра K_1 внутреннего регулятора настраиваются параметры внешнего ПИ-регулятора для объекта $\hat{W}_2 = \hat{W}\hat{W}_p$.

Так же от внутреннего к внешнему настраиваются более сложные каскадные регуляторы.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Выполните линеаризацию уравнения $x^{(1)} + (x - 1)^2 = 0$ вблизи решения $x(t) = \frac{t+101}{t+100}$, $t \geq 0$.
2. Напишите дифференциальное уравнение второго порядка, приближенно описывающее звено задержки на 0.01 с.
3. Найдите общий вид действительного решения уравнения:

$$\text{а) } x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + x(t) = 0,$$

$$\text{б) } x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + x(t) = 1,$$

$$\text{в) } x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + x(t) = \sin t.$$

4. Для указанных характеристических многочленов постройте соответствующие однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка и опишите качественный характер поведения решений:

$$\text{а) } a(\lambda) = (\lambda - 0.5)(\lambda + 0.9), \quad \text{б) } a(\lambda) = (\lambda^2 + 4\lambda + 8).$$

5. Проверьте устойчивость линейных дифференциальных уравнений из предыдущего задания.
6. Найдите выражение для переходной характеристики $h(t)$ системы

$$x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + x(t) = u(t). \quad (1.19)$$

Постройте график функции $h(t)$.

7. Чему равна импульсная характеристика $w(t)$ системы (1.19)?
Постройте график функции $w(t)$.

8. К объекту, описываемому уравнением (1.19), добавили отрицательную обратную связь $u(t) = -kx(t)$. При каких значениях коэффициента k полученная система управления будет устойчивой?
9. Составьте схему замкнутой системы управления «человек–автомобиль». Чему соответствует звено вычитания в отрицательной обратной связи?
10. Напишите дифференциальное уравнение 2-го порядка, приближенно описывающее звено задержки по времени на 0.01 с.
11. Разложите на сумму функций Хэвисайда функцию $u(t) = (-1)^{[t]}$, $0 \leq t \leq 4$, где $[t]$ — целая часть t .
12. Пользуясь принципом суперпозиции, постройте отклик системы (1.19) с нулевыми начальными условиями $x(0) = 0$, $x^{(1)}(0) = 0$ на входную функцию $u(t)$ из предыдущего задания.
13. Приведите пример реальной системы с каскадным регулятором на рис. 1.19.
14. Придумайте схему каскадного регулятора с двумя рулевыми машинками и опишите алгоритм его настройки.

Глава 2

Анализ линейных систем с помощью преобразования Лапласа

В этой главе познакомимся с аналитической техникой построения и анализа регуляторов на основании преобразования Лапласа.

2.1 Преобразование Лапласа

Пусть $x(t)$ — комплекснозначная функция, определенная на положительной полуоси $t \geq 0$, кусочно-дифференцируемая и растущая по модулю не быстрее экспоненты $|x(t)| \leq ce^{\alpha t}$, где $c > 0$ и α — действительные числа. *Преобразованием Лапласа* функции $x(t)$ называется линейное преобразование, определенное через интеграл

$$\hat{\mathcal{L}}x(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-s\tau} x(\tau) d\tau \doteq X(s).$$

Комплексная переменная s ограничена условием $\operatorname{Re} s > \alpha$, чтобы интеграл был конечен. Функция (комплекснозначная) $X(s)$, полученная в результате преобразования Лапласа функции $x(t)$, называется *образом Лапласа* (или *изображением*) для $x(t)$. Функция $x(t)$ называется *прообразом* (*оригиналом*). Соответствие между образом и оригиналом будем обозначать

$$X(s) \doteq x(t).$$

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами.

1. Взаимно-однозначность при $\operatorname{Re} s > \alpha$ (без доказательства).

2. Линейность: $ax_1(t) + bx_2(t) \doteq aX_1(s) + bX_2(s)$, $0(t) \doteq 0(s)$. Следует из свойств интеграла.

3. Образ производной $x^{(1)}(t) \doteq sX(s) - x(+0)$. Доказывается взятием интеграла Лапласа по частям:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &\doteq \int_0^{\infty} e^{-s\tau} x^{(1)}(\tau) d\tau = \\ &= e^{-s\tau} x(\tau) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-s\tau} x(\tau) d\tau = \\ &= -x(+0) + sX(s). \end{aligned}$$

4. Образ интеграла $i(t) \doteq \int_0^t x(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{s} X(s)$. Следует из равенств

$$X(s) \doteq x(t) = i^{(1)}(t) \doteq sI(s) - i(+0) = sI(s).$$

5. Образ экспоненты $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{s-\alpha}$. Для доказательства нужно применить формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. После подстановки $s = a + ib$ интеграл Лапласа $\int_0^{\infty} e^{-s\tau} e^{\alpha\tau} d\tau$ сводится к двум интегралам вида

$$\int_0^{\infty} e^{-c\tau} \cos(b\tau) d\tau, \quad \int_0^{\infty} e^{-c\tau} \sin(b\tau) d\tau, \quad c \doteq a - \alpha.$$

Эти интегралы берутся по частям.

6. Образ «единицы» (функции Хэвисайда) $1(t) \doteq \frac{1}{s}$. Следует из свойства 5 при $\alpha = 0$.

7. Сдвиг временного аргумента назад: $x(t-T) \doteq e^{-sT} X(s)$. Доказывается заменой переменных $\theta = \tau - T$:

$$\begin{aligned} x(t-T) &\doteq \int_0^{\infty} e^{-s\tau} x(\tau-T) d\tau = \\ &= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} e^{-sT} e^{-s(\tau-T)} x(\tau-T) d(\tau-T) = \\ &= e^{-sT} \int_{\theta=-T}^{\theta=\infty} e^{-s\theta} x(\theta) d\theta = e^{-sT} \int_{\theta=0}^{\theta=\infty} e^{-s\theta} x(\theta) d\theta = e^{-sT} X(s). \end{aligned}$$

Заметим, что для сдвига *вперед* формула $x(t+T) \doteq e^{sT} X(s)$ верна только при условии $x(0 < t < T) = 0$.

8. Сдвиг аргумента образа: $e^{\alpha t}x(t) \doteq X(s - \alpha)$. Докажите самостоятельно в качестве упражнения.
9. Образ свертки: $w * u \doteq W(s)U(s)$. Для доказательства используется свойство 7:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}\{w * u\} &= \hat{\mathcal{L}}\left\{\int_0^\infty w(t - \tau)u(\tau)d\tau\right\} = \\ &= \int_0^\infty \hat{\mathcal{L}}\{w(t - \tau)\}u(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}W(s)u(\tau)d\tau = W(s)U(s).\end{aligned}$$

2.2 Передаточные функции и их свойства

Из свойства 9 следует, что для записи линейной системы с импульсной функцией $w(t)$ можно использовать два равносильных способа:

$$x(t) = \int_0^\infty u(\tau)w(t - \tau)d\tau \quad \doteq \quad X(s) = W(s)U(s).$$

Ввиду линейности системы отношение $\frac{X(s)}{U(s)} = W(s)$ не зависит от функций $u(t), x(t)$ на входе и выходе.

Определение 5. Образ Лапласа $W(s)$ импульсной функции $w(t)$ называется *передаточной функцией* линейной системы.

Упражнение 14. Покажите, что образ Лапласа $H(s)$ от переходной характеристики $h(t)$ связан с передаточной функцией соотношением $H(s) = \frac{1}{s}W(s)$.

Построим передаточные функции простейших звеньев.

1. Звено интегрирования $x(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$. Применяв преобразование Лапласа к обеим частям равенства, получим соотношение $X(s) = \frac{1}{s}U(s)$. Следовательно, передаточная функция идеального интегрирующего звена есть $W(s) = \frac{1}{s}$.

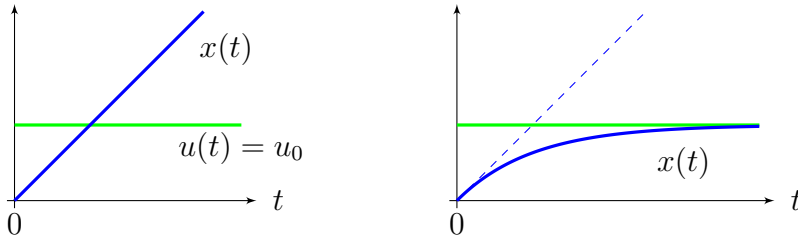


Рис. 2.1: Идеальный интегратор и интегратор с насыщением

2. Реальный интегратор (или интегратор с насыщением, апериодическое звено):

$$Tx^{(1)}(t) + x(t) = u(t) \quad \doteq \quad TsX(s) - Tx(0) + X(s) = U(s)$$

При нулевом начальном состоянии $x(0) = 0$ получаем соотношение

$$X(s) = \frac{1}{Ts + 1}U(s).$$

Передаточная функция апериодического звена:

$$W(s) = \frac{1}{Ts + 1}.$$

3. Звено, описываемое стационарным линейным дифференциальным уравнением с нулевыми начальными условиями:

$$[a_n \hat{s}^n + \dots + a_0 \hat{s}^0] x(t) = [b_m \hat{s}^m + \dots + b_0 \hat{s}^0] u(t), \quad (2.1)$$

$$x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \doteq \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Многочлены $b(s), a(s)$ называются соответственно *числителем* и *знаменателем* передаточной функции $W(s)$. Знаменатель $a(s)$ совпадает с характеристическим многочленом дифференциального уравнения (2.1).

4. Передаточная функция последовательного соединения (рис. 2.2):

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = W_2(s)W_1(s).$$

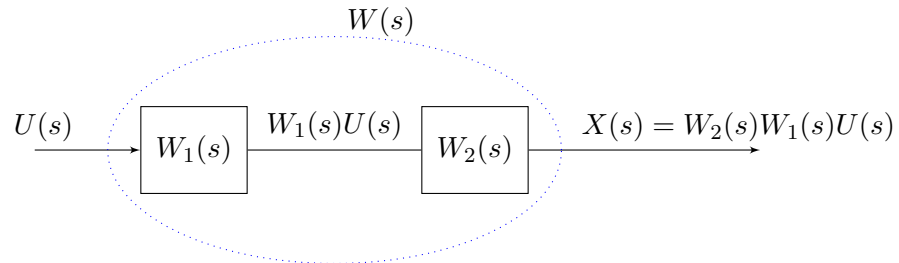


Рис. 2.2: Последовательное соединение звеньев

5. Передаточная функция параллельного соединения (рис. 2.3):

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s).$$

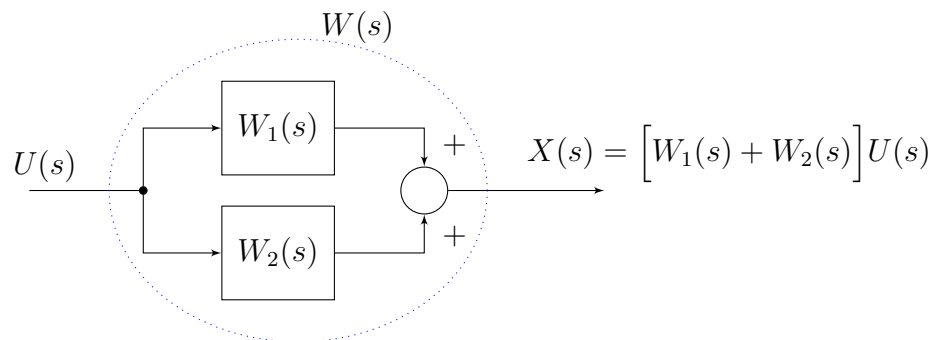


Рис. 2.3: Параллельное соединение звеньев

Обратим внимание, что при параллельном соединении выходы звеньев соединяются через сумматор.

6. Передаточная функция звена с отрицательной обратной связью (рис. 2.4):

$$\begin{aligned} X(s) &= W_1(s) [U(s) - W_2(s)X(s)] \Rightarrow \\ X(s) &= \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} U(s), \\ W(s) &= \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}. \end{aligned}$$

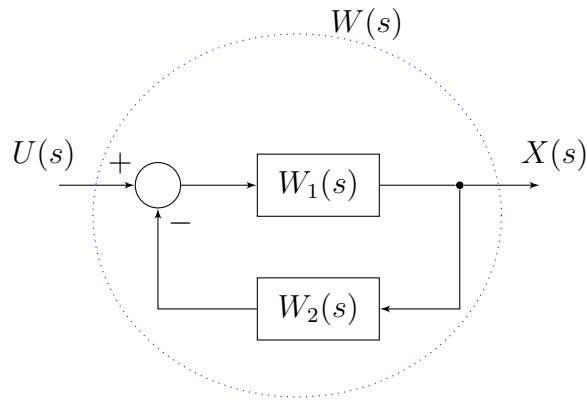


Рис. 2.4: Звено с отрицательной обратной связью

2.3 Первая предельная теорема

Свойство 10 преобразования Лапласа сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть $x(t) \doteq X(s)$ и существует предел

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \doteq x(\infty)$, $|x(\infty)| < c$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$.

Доказательство. Рассмотрим изображение производной $x^{(1)}(t)$:

$$\hat{\mathcal{L}}x^{(1)}(t) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} x^{(1)}(\tau) d\tau = sX(s) - x(0).$$

Из последнего равенства в пределе $s \rightarrow 0$ получаем равенство

$$x(\infty) - x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0),$$

откуда следует $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$. □

Рассмотрим следствия теоремы в применении к контуру регулирования на рис. 2.5. Полагаем, что на вход подается функция Хэвисайда $1(t) \doteq \frac{1}{s}$.

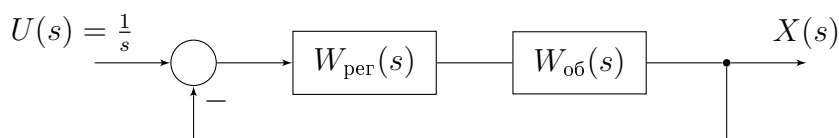


Рис. 2.5: Контур регулирования

Предложение 1. Пусть $W_{\text{пер}}(s) = K$, $W_{\text{об}}(s) = \frac{e^{-s}}{s}$, т. е. контур регулирования представляет из себя рулевую машинку. И пусть значение параметра K выбрано так, что контур устойчивый и существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \doteq x(\infty)$, $|x(\infty)| < c$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$, т. е. контур обеспечивает регулирование в смысле сходимости выхода $x(t)$ к заданному на входе значению.

Доказательство. При $u(t) = 1(t)$ выход регулятора по определению является переходной характеристикой: $x(t) \equiv h(t)$. По предельной теореме $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)$, $H(s) \doteq h(t)$. Учтем соотношение $H(s) = \frac{1}{s}W(s)$ (упражнение 14) и значение передаточной функции для системы с отрицательной обратной связью $W(s) = \frac{W_{\text{пер}}(s)W_{\text{об}}(s)}{1+W_{\text{пер}}(s)W_{\text{об}}(s)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_{\text{пер}}(s)W_{\text{об}}(s)}{1+W_{\text{пер}}(s)W_{\text{об}}(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \left(\frac{e^{-s}}{s} \right)}{1 + K \left(\frac{e^{-s}}{s} \right)} = 1. \end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Пусть теперь в передаточной функции объекта управления $W_{\text{об}}(s)$ вместо идеального интегратора $\frac{1}{s}$ стоит апериодическое звено $\frac{1}{s+1}$ (интегратор с насыщением): $W_{\text{об}}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$. Покажем с помощью предельной теоремы, что простейший П-регулятор с передаточной функцией $W_{\text{пер}}(s) = K$ уже не обеспечивает регулирования в смысле сходимости $x(t) \rightarrow 1$.

Предложение 2. Пусть $W_{\text{пер}}(s) = K$, $W_{\text{об}}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$. И пусть значение параметра K выбрано так, что контур устойчивый и существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \doteq x(\infty)$, $|x(\infty)| < c$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 1$, т. е. контур не обеспечивает регулирование в смысле сходимости выхода $x(t)$ к заданному на входе значению.

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства предложения 1, приходим к соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \left(\frac{e^{-s}}{s+1} \right)}{1 + K \left(\frac{e^{-s}}{s+1} \right)} = \frac{K}{(1+K)} \neq 1.$$

Предложение доказано. \square

Усложним систему управления, заменив П-регулятор ПИ-регулятором с передаточной функцией $W_{\text{рег}}(s) = W_{\text{ПИ}}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s}\right)$. Покажем, что цель управления будет достигаться.

Предложение 3. Пусть $W_{\text{рег}}(s) = W_{\text{ПИ}}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s}\right)$, $W_{\text{об}}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$. И пусть значение параметров $K, T_{\text{и}}$ выбрано так, что контур устойчивый и существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \doteq x(\infty)$, $|x(\infty)| < c$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$, т. е. контур обеспечивает регулирование в смысле сходимости выхода $x(t)$ к заданному значению.

Доказательство. Подставив в полученное выше выражение передаточную функцию ПИ-регулятора, получим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s}\right) \left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right)}{\left(1 + K \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s}\right) \left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right)\right)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \left(\frac{1}{T_{\text{и}}s}\right)}{\left(1 + K \left(\frac{1}{T_{\text{и}}s}\right)\right)} = \frac{K}{K} = 1. \end{aligned}$$

Предложение доказано. \square

Упражнение 15. Докажите предложение 3 для случая ПИД-регулятора с передаточной функцией

$$W_{\text{рег}}(s) = W_{\text{ПИД}}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s} + \frac{T_{\text{д}}s}{1 + T_{\text{с}}s}\right).$$

Указание: проверьте равенство $\lim_{s \rightarrow 0} W_{\text{ПИД}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} W_{\text{ПИ}}(s)$.

Оценка снизу для интегральной ошибки

Рассмотрим интегральную ошибку регулирования

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t |u(\tau) - x(\tau)| d\tau.$$

Обозначим $i(t) \doteq \int_0^t (u(\tau) - x(\tau)) d\tau \leq \varepsilon(t) \doteq \mathcal{E}(s)$. Значение величины $i_{\infty} \doteq \lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$ является оценкой снизу для интегральной ошибки $\varepsilon_{\infty} \geq i_{\infty}$ (см.

рис. 2.6).

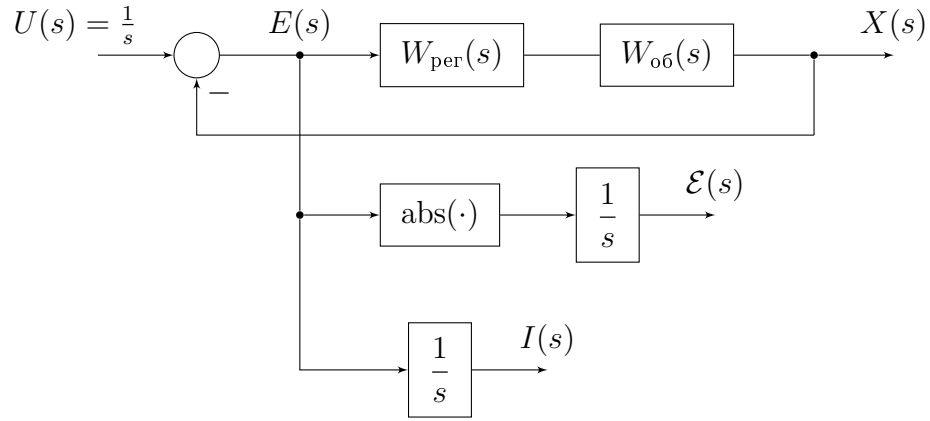


Рис. 2.6: Интегральная ошибка регулирования

Утверждение 7. Пусть $W_{об}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$,
 $W_{пер}(s) = W_{ПИ}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_{и}s} \right)$. Тогда $\varepsilon_{\infty} \geq i_{\infty} = \frac{T_{и} a_0}{K b_0}$.

Доказательство. По предельной теореме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sI(s), \quad I(s) \doteq i(t).$$

Согласно блок-схеме (рис. 2.6)

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{s} E(s) = \frac{1}{s} (U(s) - X(s)) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - H(s) \right) = \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} W(s) \right), \quad W(s) = \frac{W_{пер}(s) W_{об}(s)}{1 + W_{пер}(s) W_{об}(s)}. \end{aligned}$$

Тогда верны равенства

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{W_{пер}(s) W_{об}(s)}{1 + W_{пер}(s) W_{об}(s)} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{\frac{K b_0}{T_{и}s a_0}}{\left(1 + \frac{K b_0}{T_{и}s a_0} \right)} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1 + \frac{K b_0}{T_{и}s a_0}} \right) = \frac{T_{и} a_0}{K b_0}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

Из полученной оценки для интегральной ошибки следует, что в двух слу-

чаях невозможно добиться регулирования.

1. При малых значениях коэффициента усиления K в регуляторе.
2. При малых значениях коэффициента b_0 в объекте управления.

2.4 Вторая предельная теорема

Следующее свойство преобразования Лапласа сформулируем в виде второй предельной теоремы.

Теорема 2. Пусть $x(t) \doteq X(s)$ и существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) \doteq x(+0)$, $|x(+0)| < c$. Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$.

Доказательство. Как и в доказательстве первой предельной теоремы, рассмотрим образ производной $x^{(1)}(t)$:

$$\hat{\mathcal{L}}x^{(1)}(t) = \int_0^\infty e^{-s\tau} x^{(1)}(\tau) d\tau = sX(s) - x(+0).$$

Из последнего равенства в пределе $s \rightarrow \infty$ получим равенство

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) - x(+0),$$

откуда следует $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$. □

Рассмотрим применения теоремы к анализу систем управления.

Пример 1. Вычислим значение $h(+0)$ для переходной характеристики рулевой машинки (рис. 2.7)

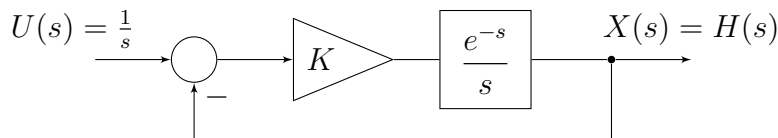


Рис. 2.7: Блок-схема рулевой машинки

По второй предельной теореме

$$h(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K \left(\frac{e^{-s}}{s} \right)}{1 + K \left(\frac{e^{-s}}{s} \right)} = 0.$$

Это значит, что переходная характеристика $h(t)$ не испытывает скачка в нуле: $h(-0) = h(0) = h(+0)$.

Определение 6. Линейная система, переходная характеристика которой не испытывает скачка в нуле ($h(+0) = 0$, см. рис. 2.8), называется *физически реализуемой*.

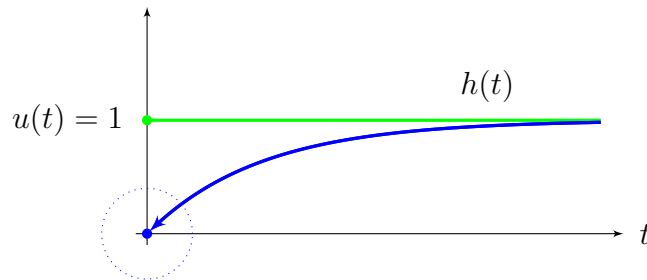


Рис. 2.8: Переходная характеристика физически реализуемой системы

Физическая реализуемость связана с *инертностью* системы: при мгновенном появлении единичного входного сигнала в момент $t = 0$ физически реализуемая система не изменяет скачком своего состояния, а начинает движение из нуля без разрыва функции выхода $h(t)$.

Пример 2. Идеальный умножитель (рис. 2.9)

не является физически реализуемым звеном: $h(+0) = K \neq 0$ (см. рис. 2.10).

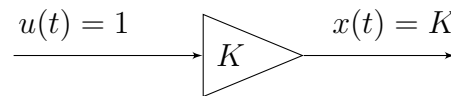


Рис. 2.9: Идеальный умножитель

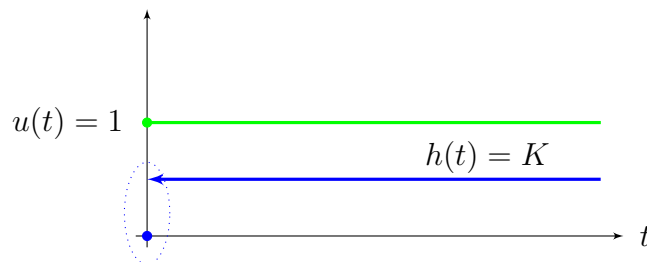


Рис. 2.10: Переходная характеристика идеального умножителя

Этот элементарный вывод на первый взгляд парадоксален. Кажется бы, ничего не стоит «физически реализовать» звено умножения с $K = 0.5$ посредством электрической цепи из двух сопротивлений (рис. 2.11):

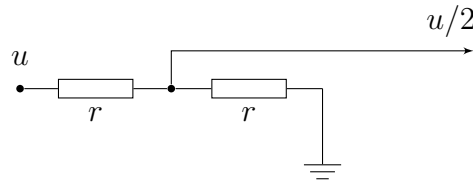


Рис. 2.11: «Физическая реализация» звена умножения с $K = 0.5$

Разрешение парадокса состоит в том, что реальная цепь имеет ненулевое сопротивление R проводников и ненулевую емкость C , которые нужно учесть в математической модели (рис. 2.12):

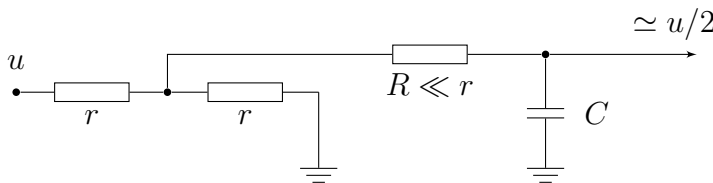


Рис. 2.12: Учет сопротивления и емкости реальной цепи

«Реальный умножитель» на рис. 2.12 описывается блок-схемой с дополнительным звеном $W_{RC}(s)$:

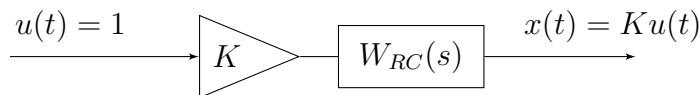


Рис. 2.13: «Реальный» умножитель

Именно это звено и делает всю схему физически реализуемой в смысле определения 6.

Упражнение 16. Покажите, что передаточная функция RC -цепочки на рис. 2.12 есть $W_{RC}(s) = \frac{1}{1+RCs}$.

Упражнение 17. Проверьте физическую реализуемость звена с передаточной функцией $W(s) = K \left(\frac{1}{1+RCs} \right)$.

Упражнение 18. Докажите, что звено с дробно-рациональной передаточной функцией $W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$ физически реализуемо тогда и только тогда, когда $m < n$.

2.5 Обращение преобразования Лапласа

Пусть $H(s) = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0}{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0} \doteq \frac{p(s)}{q(s)}$, $m < n$ есть изображение переходной характеристики $h(t)$. Предположим, что многочлен $q(s)$ нормирован: $q_n = 1$. Тогда $q(s) = (s - \alpha_1) \dots (s - \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Для ряда частных случаев можно вычислить оригинал $h(t)$ без использования общей формулы обращения преобразования Лапласа.

Случай некрратных действительных корней $q(s)$

Пусть многочлен $q(s)$ имеет только некрратные действительные корни: $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Тогда $H(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ допускает разложение на элементарные дроби:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1}{(s - \alpha_1)} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha_n)}, \quad A_i \in \mathbb{R}.$$

После нахождения коэффициентов A_i из свойства 5 на с. 42 следует решение $\frac{p(s)}{q(s)} \doteq A_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + A_n e^{\alpha_n t}$.

Коэффициенты A_i получаются из предельного соотношения

$$H(s) \xrightarrow{s \rightarrow \alpha_i} \frac{A_i}{(s - \alpha_i)}.$$

Пример. Пусть $H(s) = \frac{s + 1}{s(s + 2)(s + 3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + 2)} + \frac{A_3}{(s + 3)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{s} &= H(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{1}{s(2)(3)} = \frac{1}{6s}, \\ \frac{A_2}{(s + 2)} &= H(s) \Big|_{s \rightarrow -2} = \frac{-1}{(-2)(s + 2)(1)} = \frac{1}{2(s + 2)}, \\ \frac{A_3}{(s + 3)} &= H(s) \Big|_{s \rightarrow -3} = \frac{-2}{(-3)(-1)(s + 3)} = \frac{-2}{3(s + 3)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $H(s) \doteq h(t) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right) \cdot 1(t)$.

Упражнение 19. Постройте переходную характеристику для аperiodического звена с передаточной функцией $W(s) = \frac{1}{1+Ts}$. *Указание:* воспользуйтесь соотношением $H(s) = \frac{1}{s}W(s)$. *Ответ:* $h(t) = (1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$.

Упражнение 20. Постройте переходную характеристику для дифференцирующего звена с передаточной функцией $W(s) = \frac{s}{1+Ts}$. *Ответ:* $h(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T} \cdot 1(t)$. Ответьте на вопрос, является ли это звено физически реализуемым.

Упражнение 21. Напишите дифференциальные уравнения, описывающие звенья с передаточными функциями: а) $W(s) = \frac{1}{1+Ts}$; б) $W(s) = \frac{s}{1+Ts}$.

Ответ: а) $Tx^{(1)}(t) + x(t) = u(t)$; б) $Tx^{(1)}(t) + x(t) = u^{(1)}(t)$.

Случай кратных действительных корней $q(s)$

Пусть знаменатель $q(s)$ изображения $H(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ имеет кратные действительные корни $\alpha_i \in \mathbb{R}$:

$$q(s) = (s - \alpha_1)^{k_1} \dots (s - \alpha_l)^{k_l}, \quad k_1 + \dots + k_l = n.$$

В этом случае $H(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ так разлагается на элементарные дроби:

$$\begin{aligned} \frac{p(s)}{q(s)} &= \frac{A_{11}}{(s - \alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(s - \alpha_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{(s - \alpha_2)} + \frac{A_{22}}{(s - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(s - \alpha_2)^{k_2}} + \dots \\ &\dots + \frac{A_{l1}}{(s - \alpha_l)} + \frac{A_{l2}}{(s - \alpha_l)^2} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(s - \alpha_l)^{k_l}}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для нахождения оригинала $h(t)$ функции $H(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ достаточно найти оригинал $\frac{1}{(s-\alpha)^m}$.

Утверждение 8. $\frac{1}{(s-\alpha)^m} \doteq e^{\alpha t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$.

Доказательство. По свойству 8 на с. 43 достаточно показать соотношение

$\frac{1}{s^m} \doteq \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$. Оно устанавливается последовательным интегрированием: $\frac{1}{s} \doteq 1$, $\frac{1}{s^2} \doteq \int_0^t 1 d\tau = t$, $\frac{1}{s^3} \doteq \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}$, $\frac{1}{s^4} \doteq \int_0^t \frac{\tau^2}{2} d\tau = \frac{t^3}{2 \cdot 3}$

и т. д. □

Значения коэффициентов A_{ij} в разложении (2.2) находятся приведением правой части к общему знаменателю $q(s)$ и сравнением числителей в левой и правой частях равенства.

Упражнение 22. Постройте переходную характеристику для звена с передаточной функцией $W(s) = \frac{e^{-Ts}}{(1+T_0s)^2}$. *Указание:* решите задачу для передаточной функции $W^*(s) = \frac{1}{(1+T_0s)^2}$ и воспользуйтесь свойством 7 на с. 42).
Ответ: $h(t) = \left[1 - e^{-(t-T)/T_0} - \frac{(t-T)}{T_0} e^{-(t-T)/T_0} \right] \cdot 1(t-T)$.

Операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений

По определению, переходная характеристика $h(t)$, $t > 0$ есть решение дифференциального уравнения системы при нулевых начальных условиях и единичной функции правой части. Значит, вычислением переходной характеристики $h(t)$ по ее изображению $H(s)$ находится решение соответствующего дифференциального уравнения с нулевыми начальными условиями и единицей в правой части. В более общем случае, если начальные условия дифференциального уравнения ненулевые и правая часть имеет простое изображение, то применяя преобразование Лапласа, также приходим к алгебраическому уравнению на изображение решения. Такой способ решения дифференциальных уравнений называется *операторным*. Считается, что первым, кто предложил операторный способ, был Оливер Хевисайд (1892 г.). Тем не менее еще раньше операторный метод решения дифференциальных уравнений был предложен русским математиком М. Е. Ващенко-Захарченко в его магистерской диссертации «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (Киев, 1862).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Пользуясь определением, найдите образы Лапласа для функций:

$$\text{а) } t; \quad \text{б) } e^t; \quad \text{в) } 2 \cos t; \quad \text{г) } 1(t-2); \quad \text{д) } t^2.$$

2. Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, найдите изображения для функций:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } e^{-t}t^2; & \text{б) } e^{-2t} + 2e^{-t}; & \text{в) } 1(t) - 1(t+1); \\ \text{г) } (t-1)^2 1(t-1) & \text{д) } \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau; & \text{е) } \int_0^t \cos(t-\tau) e^\tau d\tau. \end{array}$$

3. Найдите оригиналы для изображений:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } X(s) = \frac{e^{-s}}{s^3}; & \text{б) } X(s) = \frac{e^{-2s}}{s}; & \text{в) } X(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}; \\ \text{г) } X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-1)} & \text{д) } X(s) = \frac{e^{-s}}{s^3} + \frac{e^{-2s}}{s}; & \text{е) } X(s) = \frac{e^{-s+1}}{s-2}. \end{array}$$

4. Запишите дифференциальные уравнения звеньев, заданных передаточными функциями:

$$\text{а) } W(s) = \frac{2(s+2)}{s(s^2+0.1s+2)}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{s+2}{0.1s+2}.$$

5. Найдите прообразы Лапласа и постройте переходные характеристики звеньев с передаточными функциями:

$$\text{а) } W(s) = \frac{s+2}{0.1s+2}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{2}{(s+0.2)^2}.$$

6. Постройте импульсные характеристики звеньев из предыдущего задания.

7. Найдите реакцию системы $Tx^{(1)} + x = u$, $x(0) = 0$ на входной сигнал:

$$\text{а) } u = 1(t-\tau); \quad \text{б) } u = a \sin \omega t.$$

8. Используя разложение на элементарные дроби, представьте системы в виде последовательного соединения элементарных звеньев:

$$\text{а) } W(s) = \frac{2}{s^2+s+1}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{s+2}{s(s^2+2s+1)}.$$

9. Проверьте физическую реализуемость звеньев:

$$\text{а) } W(s) = \frac{(s+2)}{(s+4)}e^{-s}; \quad \text{б) } x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + x(t) = u^{(1)}(t).$$

10. Решите операторным методом дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } x^{(2)}(t) + 3x^{(1)}(t) + 2x(t) = 1, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x^{(1)}(0) = 0;$$

$$\text{б) } x^{(2)}(t) + 3x^{(1)}(t) + 2x(t) = 1, \quad x(0) = x^{(1)}(0) = 0;$$

$$\text{в) } x^{(2)}(t) - x(t) = t, \quad x(0) = 1, \quad x^{(1)}(0) = 0;$$

$$\text{г) } x^{(2)}(t) + x^{(1)}(t) = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 1.$$

11. Пользуясь соотношением $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$ ([12], строка 17 в таблице на с. 262) покажите, что линейная система с импульсной функцией $w(t) = \frac{1}{t+1}$ не имеет передаточной функции и поэтому не описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами (2.1) и не имеет характеристического многочлена.

Глава 3

Устойчивость линейных систем

3.1 Устойчивость по входу

Исследуем устойчивость системы, описываемой линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами $a_i \in \mathbb{R}$

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) = u(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

с начальными условиями $x(0), x^{(1)}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$. Будем рассматривать в том числе и комплексные решения $x(t) \in \mathbb{C}$.

Определение 7. 1. *Решение $x(t)$ уравнения (3.1) при некоторой ограниченной функции правой части $|u(t)| \leq c_u < \infty$ устойчиво, если оно ограничено: $|x(t)| \leq c_x < \infty$. 2. Система (3.1) устойчива по входу, если для любой ограниченной функции $u(t)$ правой части все решения $x(t)$ ограничены.*

Другими словами, система (3.1) устойчива по входу, если при любом ограниченном входе выход ограничен.

Приведем критерии для проверки устойчивости по входу.

Определение 8. Многочлен $a(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ называется *устойчивым (гурвицевым)*, если все его корни имеют строго отрицательную реальную часть: $a(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0$.

Теорема 3. *Для устойчивости по входу системы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы был устойчив ее характеристический многочлен $a(\lambda)$.*

Доказательство. Покажем необходимость. От противного, пусть характеристический многочлен $a(\lambda)$ неустойчив, т.е. имеет корень $\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Сначала рассмотрим случай строгой положительности $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Обозначим $x_1(t)$ некоторое частное решение уравнения (3.1). Тогда функция $x_2(t) = x_1(t) + e^{\lambda t}$ также будет решением, которое неустойчиво, поэтому система неустойчива по входу. Пусть теперь $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Если корень нулевой ($\operatorname{Im} \lambda = 0$), то в уравнении (3.1) $a_0 = 0$, и в случае $u(t) \equiv 1(t)$ имеем неустойчивое решение $x_2(t) = \frac{1}{a_1}t$, следовательно, система неустойчива по входу. Если $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, то ввиду вещественности коэффициентов a_i имеем пару корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Обозначим $\tau \doteq \frac{\pi}{\omega}$ полупериод колебательного решения $A \cos(\omega t + \varphi)$. Выберем правую часть

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [k\tau, (k+1)\tau), \\ 0, & t \in [(k+1)\tau, (k+2)\tau), \end{cases} \quad k = 0, 2, 4, \dots$$

Тогда решением $x_2(t)$ уравнения (3.1) будет функция, составленная из отрезков косинусоид с увеличивающейся амплитудой (проверьте):

$$\omega^2 x_2(t) = \begin{cases} -\cos(\omega t) + 1, & t \in [0, \tau), \\ 2 \cos(\omega(t - \tau)), & t \in [\tau, 2\tau), \\ -3 \cos(\omega t) + 1, & t \in [2\tau, 3\tau), \\ 4 \cos(\omega(t - \tau)), & t \in [3\tau, 4\tau), \\ \dots, & \dots \end{cases}$$

(см. рисунок).

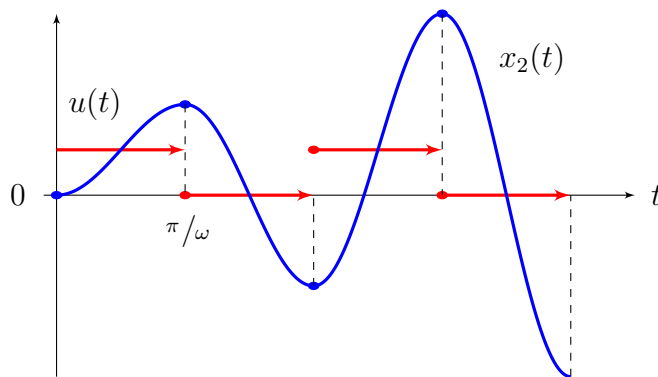


Рис. 3.1: Неустойчивое решение уравнения (3.1) в случае наличия у характеристического многочлена пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

Решение $x_2(t)$ неустойчиво, поэтому система неустойчива. Заметим, что здесь мы использовали идею резонансной раскачки решения периодическим воздействием в правой части уравнения (на входе системы).

Мы рассмотрели все случаи с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Они приводят к неустойчивости по входу. Следовательно, условие $\operatorname{Re} \lambda < 0$ необходимо для устойчивости.

Достаточность. Пусть все корни характеристического уравнения $a(\lambda) = 0$ имеют строго отрицательную реальную часть $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Тогда всякое решение однородного уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) = 0 \quad (3.2)$$

сходится к нулю. Если $x_2(t)$ и $x_3(t)$ — два частных решения неоднородного уравнения (3.1), то разность $x_3(t) - x_2(t)$ есть решение однородного уравнения (проверяется подстановкой в (3.1)), следовательно, разность $x_3(t) - x_2(t)$ сходится к нулю. Это значит, что если для некоторой функции $u(t)$ в правой части ограничено хотя бы одно частное решение $x_2(t)$, тогда для этой правой части ограничены все решения уравнения (3.1). Всегда можем выбрать $x_2(t)$ в виде свертки: $x_2(t) = \int_0^t u(\tau)w(t-\tau)d\tau$, где $w(t)$ — импульсная функция. Покажем, что $x_2(t)$ ограничено. Пусть функция в правой части произвольная ограниченная $|u(t)| < c_u$. Верно неравенство

$$|x_2(t)| < c_u \int_0^t |w(t-\tau)| d\tau = c_u \int_0^t |w(\theta)| d\theta.$$

Импульсная функция $w(t)$ есть производная переходной характеристики: $w(t) = \frac{d}{dt}h(t)$. Переходная характеристика $h(t)$ по определению есть отклик системы (3.1) на ступенчатую функцию Хевисайда. В разделе 1.2 было показано, что такой отклик есть сумма константы $\frac{1}{a_0}$ и решения ((1.4), гл. 1) однородной системы:

$$\begin{aligned} h(t) &= (c_{11} + c_{12}t + \dots + c_{1k_1}t^{k_1-1}) e^{\lambda_1 t} + \\ &+ (c_{21} + c_{22}t + \dots + c_{2k_2}t^{k_2-1}) e^{\lambda_2 t} + \dots + \\ &+ (c_{l1} + c_{l2}t + \dots + c_{lk_l}t^{k_l-1}) e^{\lambda_l t} + \frac{1}{a_0}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что константы c_{ij} в последнем выражении всегда выбираются та-

ким образом, чтобы переходная характеристика $h(t)$ была вещественной, поскольку она есть отклик системы (3.1) на вещественную функцию Хевисайда при вещественных коэффициентах a_i уравнения (3.1) и нулевых начальных условиях. Также вещественной является импульсная функция $w(t)$.

Далее обратим внимание, что при $n = 0$ доказываемая теорема становится очевидной, а при $n > 0$ система (3.1) физически реализуема (упражнение 18), то есть $h(t)$ не имеет разрыва в нуле (определение 6); поэтому $w(t)$ как производная $h(t)$ ограничена и является суммой конечного числа слагаемых $w_i(t)$ вида

$$w_i(t) \doteq c_{ik} t^{k-1} e^{-\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad \alpha_i \doteq -\operatorname{Re} \lambda_i > 0, \quad \omega_i \doteq \operatorname{Im} \lambda_i.$$

Тогда

$$|w_i(\tau)| \leq \operatorname{const} \cdot |t^k e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)|$$

и верны неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^t |w_i(\tau)| d\tau &\leq \operatorname{const}_1 + \operatorname{const}_2 \int_0^t |t^k e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)| d\tau \leq \\ &\leq \operatorname{const}_1 + \operatorname{const}_2 \int_0^t t^k e^{-\alpha t} d\tau \leq \\ &\leq \operatorname{const}_1 + \operatorname{const}_2 \int_0^\infty t^k e^{-\alpha t} d\tau = \\ &= \operatorname{const}_1 + \operatorname{const}_2 \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \doteq c_{w,i}. \end{aligned}$$

(Интеграл в правой части этого неравенства табличный, он был вычислен ранее в главе 2 при доказательстве формулы обращения преобразования Лапласа в случае кратных действительных корней. Действительно, из утверждения 8 при $\alpha = 0$ сразу следует соотношение $\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \doteq \frac{1}{s^m}$, которое буквально означает $\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-st} dt = \frac{1}{s^m}$. После переобозначения $k \doteq m - 1$, $\alpha \doteq s$ получим $\int_0^\infty t^k e^{-\alpha t} dt = \frac{k!}{\alpha^{k+1}}$.)

Таким образом, верна оценка

$$|x_2(t)| < c_u \int_0^t |w(\theta)| d\theta \leq c_u (c_{w,1} + \dots + c_{w,l}) \doteq c_u c_w.$$

Это значит, что решение $x_2(t)$ устойчиво, а вместе с ним ввиду произволь-

ности ограниченной функции в правой части устойчивы и все решения неоднородного уравнения (3.1). Теорема доказана. \square

Следствие. Для устойчивости по входу системы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы все решения $x(t)$ однородного уравнения (3.2) (они могут отличаться начальными условиями) сходились на бесконечности к нулю.

Доказательство. Докажите самостоятельно в качестве упражнения, используя теорему 3 и общий вид ((1.4), гл. 1) решения однородного уравнения. \square

3.2 Критерий Михайлова

Определение 9. Годографом многочлена $a(\lambda)$ называется кривая на комплексной плоскости $a(i\omega) \in \mathbb{C}$, $\omega \geq 0$.

Утверждение 9. (Критерий Михайлова). Многочлен $a(\lambda)$ степени n устойчив тогда и только тогда, когда годограф $a(i\omega)$ при увеличении ω от 0 до ∞ : 1) движется против часовой стрелки и 2) проходит ровно n квадрантов комплексной плоскости (см. рис. 3.2, 3.3).

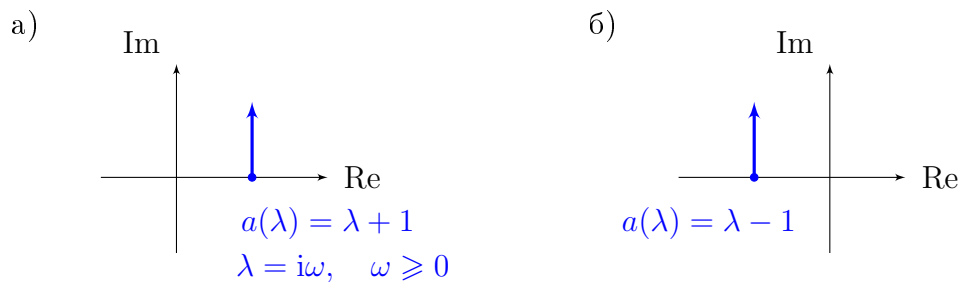


Рис. 3.2: Годографы устойчивого (а) и неустойчивого (б) многочленов первого порядка

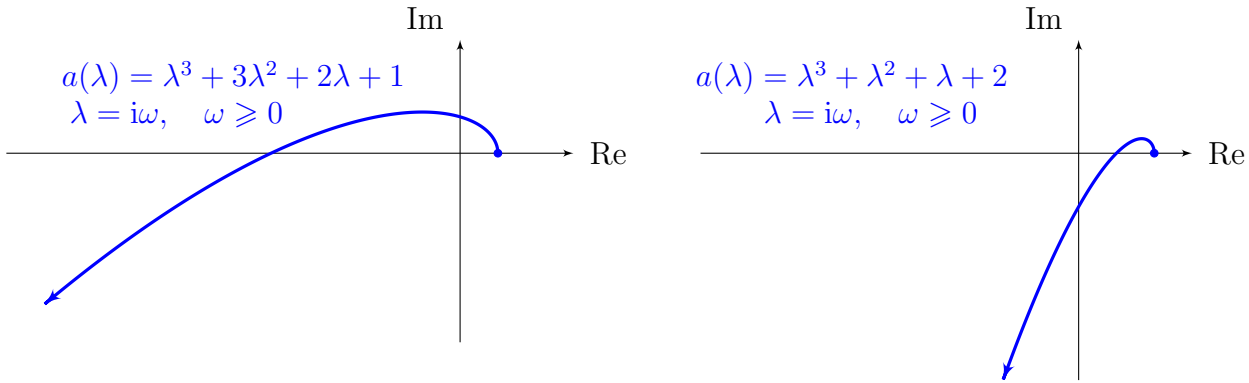


Рис. 3.3: Годографы устойчивого (а) и неустойчивого (б) многочленов третьего порядка

Доказательство критерия Михайлова основывается на *принципе аргумента*. Напомним, аргументом $\arg a$ комплексного числа $a = x + iy$ называется угол на комплексной плоскости между осью абсцисс и направлением из нуля в точку a (рис. 3.4)

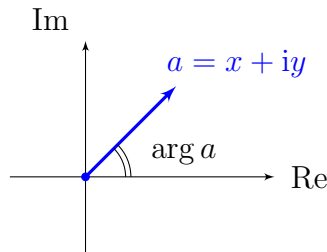


Рис. 3.4: Аргумент комплексного числа a

Утверждение 10. (Принцип аргумента). Пусть $a(i\omega)$, $\omega \geq 0$, — годограф многочлена $a(\lambda)$ с действительными коэффициентами. Тогда

$$\arg a(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \doteq \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\arg a(i\omega) - \arg a(-i\omega)] = (m_- - m_+) \pi,$$

где m_- — число корней $a(\lambda)$ в левой комплексной полуплоскости, m_+ — число корней $a(\lambda)$ в правой полуплоскости.

Доказательство. Из разложения $a(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ следует

$$a(i\omega) = a_n \underbrace{(i\omega - \lambda_1)}_{\mu_1} \dots \underbrace{(i\omega - \lambda_n)}_{\mu_n} = \rho(\omega) e^{i\varphi(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) \doteq \arg a(i\omega) = \arg \mu_1 + \dots + \arg \mu_n.$$

Тогда $\arg a(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \arg \mu_1 \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} + \dots + \arg \mu_n \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty}$. Если корень λ_1 расположен в левой полуплоскости (рис. 3.5 а), то радиус-вектор из нуля в точку $a(i\omega)$ при увеличении ω вращается против часовой стрелки, приращение аргумента положительное:

$$\arg \mu_1 \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$

Для корня λ_2 в правой полуплоскости (рис. 3.5 б) радиус-вектор $a(i\omega)$ при увеличении ω вращается по часовой стрелке, приращение аргумента отрицательное:

$$\arg \mu_2 \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = -3\pi/2 - (-\pi/2) = -\pi.$$

Следовательно, верно равенство $\arg a(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = (m_- - m_+) \pi$, где m_- , m_+ — числа корней $a(\lambda)$ соответственно в левой и правой полуплоскости. Утверждение доказано. \square

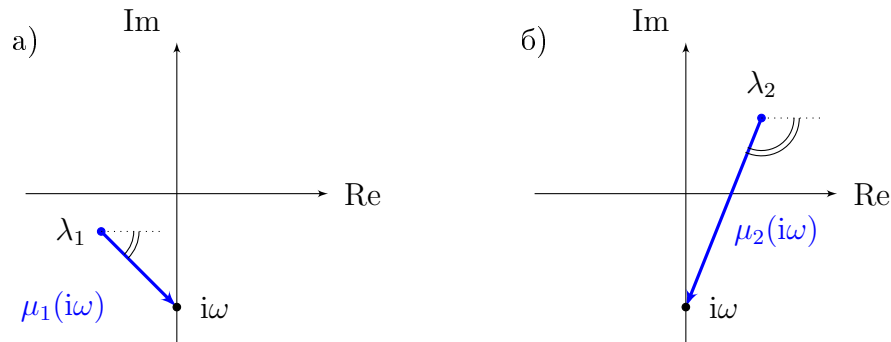


Рис. 3.5: Аргумент сомножителя μ_i в случае расположения корня λ_i в левой (а) и правой (б) полуплоскости ($i = 1, 2$)

Следствие 1. Если коэффициенты многочлена $a(\lambda)$ действительные, то имеет место равенство

$$\arg a(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{1}{2} \arg a(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Достаточно учесть, что для многочлена с действительными коэффициентами все корни расположены симметрично от оси абсцисс комплексной плоскости. \square

Следствие 2. (Критерий Михайлова). Многочлен $a(\lambda)$ степени n устойчив тогда и только тогда, когда $\arg a(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2}$, т. е. годограф многочлена проходит против часовой стрелки ровно n квадрантов комплексной плоскости.

Доказательство. Достаточно заметить, что всегда верно равенство $n = m_- + m_+$, а устойчивость многочлена равносильна условию $m_+ = 0$. \square

3.3 Критерий Рауса—Гурвица

Для многочлена $a(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_k\lambda^k$, $a_0 \neq 0$, $k \geq 0$ определим многочлен с обратным порядком коэффициентов: $\tilde{a}(\lambda) \doteq a_k\lambda^n + a_{k+1}\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda^k$. Обозначим $m_-(a(\lambda))$, $m_+(a(\lambda))$, $m_0(a(\lambda))$ соответственно числа корней $a(\lambda)$ в левой, правой полуплоскости и на мнимой оси.

Утверждение 11. Имеют место равенства $m_-(a(\lambda)) = m_-(\tilde{a}(\lambda))$, $m_+(a(\lambda)) = m_+(\tilde{a}(\lambda))$, $m_0(a(\lambda)) = m_0(\tilde{a}(\lambda))$. В частности, многочлен $a(\lambda)$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчив многочлен с обратным порядком коэффициентов $\tilde{a}(\lambda)$.

Доказательство. Пусть многочлен $a(\lambda)$ не имеет нулевых корней. Тогда $a(0) = a_0 \neq 0$, $k = 0$, и уравнение $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ равносильно уравнению $a_n + a_{n-1}\lambda^{-1} + \dots + a_0\lambda^{-n} = \tilde{a}(\lambda^{-1}) = 0$. Это значит, что если $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — множество корней $a(\lambda)$, то $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ — множество корней $\tilde{a}(\lambda)$, и наоборот. Числа λ и λ^{-1} всегда лежат в одной и той же полуплоскости, левой или правой, или оба на мнимой оси (проверьте этот факт, используя полярное представление $\lambda = \rho e^{i\varphi}$). Отсюда следуют равенства $m_-(a(\lambda)) = m_-(\tilde{a}(\lambda))$, $m_+(a(\lambda)) = m_+(\tilde{a}(\lambda))$. Поскольку $n = m_+ + m_- + m_0$, получаем $m_0(a(\lambda)) = m_0(\tilde{a}(\lambda))$. Пусть теперь многочлен $a(\lambda)$ имеет нулевой корень кратности k . Тогда

$$a(\lambda) = \lambda^k (a_n\lambda^{n-k} + a_{n-1}\lambda^{n-k-1} + \dots + a_k)$$

и многочлен в скобках не имеет нулевых корней. По определению

$$\tilde{a}(\lambda) = \lambda^k (a_k\lambda^{n-k} + a_{k+1}\lambda^{n-k-1} + \dots + a_n).$$

Нетрудно увидеть, что $\tilde{a}(\lambda)$ также имеет нулевой корень кратности k , а остальные корни получаются обращением ненулевых корней многочлена $a(\lambda)$. Учитывая, что нулевой корень лежит на мнимой оси, получаем доказываемое утверждение и для случая наличия нулевых корней. \square

Определение 10. Главным минором порядка t квадратной матрицы $n \times n$ называется определитель, расположенный на пересечении первых t строк и первых t столбцов этой матрицы.

Из определения следует, что у квадратной $n \times n$ -матрицы ровно n главных миноров (порядков $1, 2, \dots, n$).

Утверждение 12. (Критерий Рауса—Гурвица). Многочлен

$$\tilde{a}(\lambda) \doteq a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 > 0$$

(с обратным порядком коэффициентов) устойчив тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы Гурвица H строго положительны:

$$H \doteq \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \Delta_1 = a_1 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_n = |H| > 0. \end{cases}$$

Для построения матрицы H сначала на главной диагонали выписываются коэффициенты a_1, \dots, a_n , а затем сверху и снизу в столбцах добавляются остальные коэффициенты с возрастанием индекса снизу вверх. Коэффициенты с индексами меньше 0 и больше n заменяются нулями.

Доказательства критерия Рауса—Гурвица мы не приводим.

Упражнение 23. Постройте матрицы Гурвица для многочленов:

$$1) \tilde{a}(\lambda) = a_0 \lambda + a_1; \quad 2) \tilde{a}(\lambda) = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2;$$

$$3) \tilde{a}(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3.$$

$$\text{Ответ: } H_1 = [a_1]; \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \quad H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Согласно критерию Рауса—Гурвица, для многочлена первого порядка $\tilde{a}(\lambda) = \lambda + a_1$ необходимым и достаточным условием устойчивости является строгая положительность коэффициента $a_1 = \Delta_1 > 0$.

Пример 4. Для многочлена второго порядка $\tilde{a}(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ необходимым и достаточным условием устойчивости является строгая положительность миноров $\Delta_1 = a_1 > 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0$. Ввиду равенства $\Delta_2 = a_2\Delta_1$ это условие равносильно строгий положительности коэффициентов $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ (см. также упражнение 5).

Для многочленов порядка 3 и выше строгая положительность всех коэффициентов при $a_0 > 0$ уже не является достаточным условием устойчивости. Тем не менее, оно остается необходимым условием.

Утверждение 13. (Необходимое условие А. Стодолы). Для устойчивости многочлена необходимо, чтобы все его коэффициенты имели одинаковый знак. Другими словами, если коэффициенты многочлена не имеют одинакового знака, многочлен неустойчив.

Доказательство. Для многочлена с действительными коэффициентами верно разложение на сомножители порядков 1 и 2:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = \\ &= a_n(\lambda + r_1)\dots(\lambda + r_m)(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)\dots(\lambda^2 + q_1\lambda + q_2). \end{aligned}$$

Многочлен $a(\lambda)$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчив каждый из сомножителей этого разложения. Это равносильно строгий положительности всех коэффициентов $r_1, \dots, r_m, p_1, p_2, \dots, q_1, q_2$. Отсюда следует, что после раскрытия скобок все коэффициенты a_i при различных степенях λ будут иметь одинаковый знак, определяемый знаком старшего коэффициента a_n . \square

Упражнение 24. Докажите, что многочлен третьего порядка $\tilde{a}(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ ($a_0 > 0$) устойчив тогда и только тогда, когда произведение «внутренних» коэффициентов строго больше произведения «внешних» коэффициентов: $a_1a_2 > a_0a_3$.

3.4 Критерий Найквиста

Рассмотрим замкнутую систему с отрицательной обратной связью:

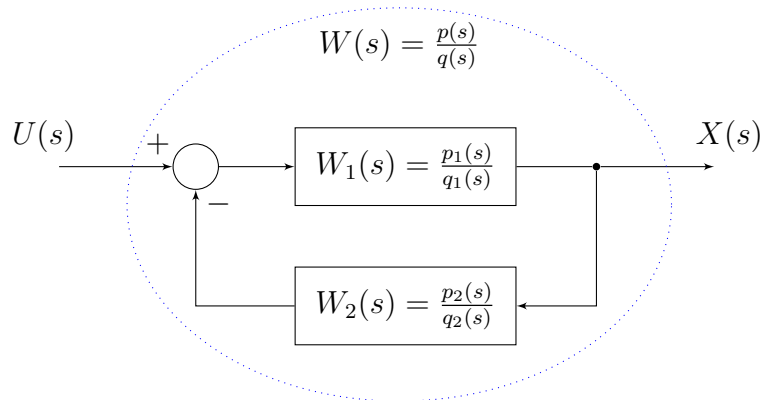


Рис. 3.6: Замкнутая система с отрицательной обратной связью

Передаточная функция этой системы имеет вид (см. раздел 2.2)

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{p_1(s)q_2(s)}{q_1(s)q_2(s) + p_1(s)p_2(s)} \doteq \frac{p(s)}{q(s)}. \quad (3.3)$$

Предполагается, что звено $W_1(s) = \frac{p_1(s)}{q_1(s)}$ физически реализуемо, т. е. $\deg p_1 < \deg q_1$, где \deg обозначает степень многочлена (см. упражнение 18). Относительно звена $W_2(s)$ предполагаем нестрогое неравенство $\deg p_2 \leq \deg q_2$. Тогда $\deg q(s) = \deg q_1(s)q_2(s)$. Определим передаточную функцию *разомкнутой* системы

$$W_p(s) \doteq W_1(s)W_2(s) = \frac{p_1(s)p_2(s)}{q_1(s)q_2(s)} \doteq \frac{p_p(s)}{q_p(s)}.$$

Обозначим $n_{1,2}$ степени многочленов $q_{1,2}(s)$. Верно соотношение

$$\deg q_p(s) = n_1 + n_2 \doteq n = \deg q(s).$$

Пусть l — число корней многочлена $q_p(s)$ в правой полуплоскости. Согласно принципу аргумента

$$\arg q_p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2} = (n - 2l) \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Теорема 4. (Г. Найквист, 1932). Замкнутая система с передаточной функ-

цией $W(s)$ (3.3) устойчива тогда и только тогда, когда годограф $\nu(i\omega) \doteq W_1(i\omega)W_2(i\omega)$, $\omega \geq 0$ (годограф Найквиста) охватывает точку -1 ровно $\frac{l}{2}$ раз, т. е.

$$\arg [1 + W_1(i\omega)W_2(i\omega)] \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = 2\pi \frac{l}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\bar{\nu}(s) \doteq 1 + W_1(s)W_2(s).$$

Годограф $\bar{\nu}(i\omega)$ получается из годографа Найквиста $\nu(i\omega)$ сдвигом последнего вправо на единицу. Если годограф Найквиста $\nu(i\omega)$ огибает -1 , то годограф $\bar{\nu}(i\omega)$ огибает ноль, и наоборот. Из определения $\bar{\nu}(s)$ следует

$$\bar{\nu}(s) = \frac{q_1(s)q_2(s) + p_1(s)p_2(s)}{q_1(s)q_2(s)} = \frac{q(s)}{q_p(s)}.$$

Тогда $\arg \bar{\nu}(s) = \arg q(s) - \arg q_p(s)$, и с учетом равенства (3.4) имеем

$$\arg \bar{\nu}(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \arg q(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} - (n - 2l) \frac{\pi}{2}.$$

Согласно принципу аргумента замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда

$$\arg q(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n \frac{\pi}{2}.$$

Ввиду предыдущего уравнения получаем условие устойчивости

$$\arg \bar{\nu}(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n \frac{\pi}{2} - (n - 2l) \frac{\pi}{2} = 2\pi \frac{l}{2}.$$

Теорема доказана. □

Для рассмотренных в первой главе ПИ- и ПИД-регуляторов актуальным является случай годографов *на границе устойчивости*, когда имеется особенность в точке $s = 0$. Эта особенность появляется при наличии в передаточной функции слагаемого с множителем $\frac{1}{s^k} = \frac{1}{(i\omega)^k}$. Например, на рис. 3.7 слева изображен годограф передаточной функции разомкнутой системы с ПИ-регулятором: $W_1(s) = 0.5 \left(1 + \frac{1}{2.5s}\right) \frac{1}{(1+1.11s)^5} e^{-s}$, $W_2(s) = 1$, $s = i\omega$. Этот годограф имеет особенность в нуле.

При наличии такого рода особенности сомножитель $\frac{1}{s}$ следует заменить на $\frac{1}{(s+\alpha)}$, $0 < \alpha \ll 1$, после чего нулевой корень $s = 0$ перейдет в близкий к нулю устойчивый действительный корень $s = -\alpha$. В результате годограф примет вид, показанный на рис. 3.7 справа пунктиром, и число полуоборотов годографа будет целым.

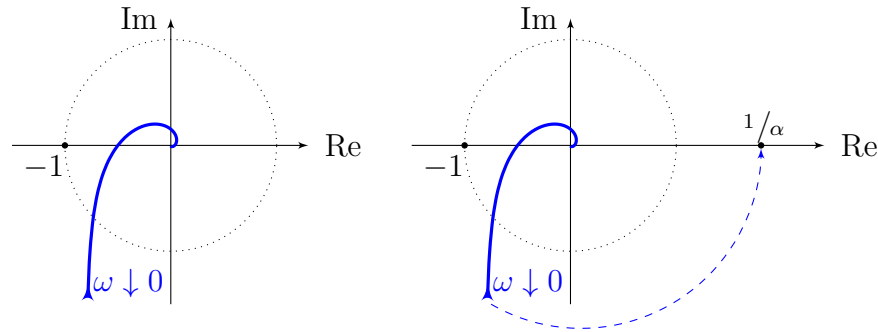


Рис. 3.7: Устранение особенности в нуле

Построение годографа в программной среде Scilab.

```
s=poly(0,"s") // формальная переменная многочленов
b=1+s // многочлен числителя передаточной функции W_p(s)
a=1+s+2*s^2 // многочлен знаменателя
// передаточной функции W_p(s)
sl=syslin('c',b,a) // создание записи линейной системы
// с передаточной функцией W_p(s)=b(s)/a(s)
nyquist(sl) // построение годографа Найквиста
```

Выбор диапазона частот для построения годографа Найквиста

Запишем передаточную функцию разомкнутой системы двумя способами, вынося общий числовой множитель сначала из знаменателя, затем из числителя:

$$W_1(s)W_2(s) \doteq \frac{P(s)}{Q(s)} = \begin{cases} \frac{1}{Q_0} \frac{P(s)}{(1+T_1s+T_2s^2+\dots)}, \\ P_0 \frac{(1+T_1's+T_2's^2+\dots)}{Q(s)}. \end{cases}$$

Введем обозначения $\rho \doteq \frac{1}{T_1}$, $\rho' \doteq \frac{1}{T_1'}$. При построении годографа в первую очередь следует обратить внимание на диапазон частот $\omega \in [\rho, \rho']$.

При построении годографа в Scilab, как правило, подходят значения ρ и ρ' , установленные по умолчанию.

Запас устойчивости по Найквисту

Предложение 4. (Следствие теоремы Найквиста). Пусть разомкнутая система устойчива, т. е. знаменатель $q_p(s)$ передаточной функции разомкнутой системы не имеет нулей в правой полуплоскости: $l = 0$. Тогда для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф передаточной функции разомкнутой системы $W_1(i\omega)W_2(i\omega)$ не огибал точку -1 .

Из этого критерия вытекает эмпирический *количественный* показатель устойчивости: чем дальше годограф устойчивой системы проходит от точки -1 , тем больше запас устойчивости этой системы.

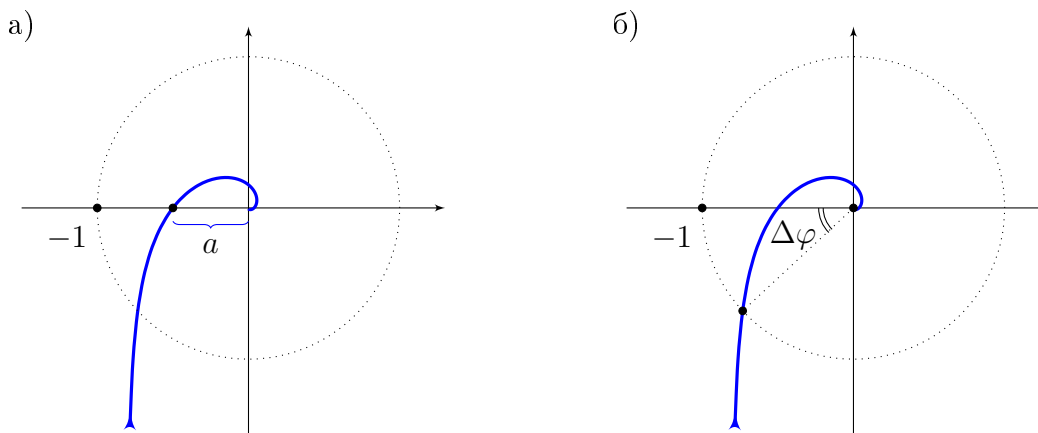


Рис. 3.8: Запас устойчивости по амплитуде (а) и по фазе (б)

На практике используют два показателя близости годографа к точке -1 : запас устойчивости *по амплитуде* K_a и *по фазе* $\Delta\varphi$. Пусть $a > 0$ есть расстояние от нулевой точки комплексной плоскости до точки пересечения годографа с отрезком $(-1, 0)$ (рис. 3.8, а). Показатель устойчивости по амплитуде определяется соотношением $K_a \doteq 20 \lg \frac{1}{a}$. Считается, что система имеет достаточный запас устойчивости по амплитуде, если $K_a \geq 3$.

Запас устойчивости по фазе определяется величиной угла $\Delta\varphi$ между лучом $(-\infty, 0)$ и направлением из нуля на точку пересечения годографа с еди-

ничной окружностью (рис. 3.8, б). Считается, что система имеет достаточный запас устойчивости по фазе, если $\Delta\varphi \geq 30^\circ$.

3.5 Устойчивость интервальных многочленов

Интервальным многочленом I_a называется множество многочленов $a(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ со значениями коэффициентов из заданных интервалов $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, $i \in \overline{1, n}$. Интервальный многочлен I_a устойчив, если устойчивы все многочлены $a(\lambda) \in I_a$.

Теорема 5. (В.Л. Харитонов, 1978). Интервальный многочлен I_a устойчив тогда и только тогда, когда устойчивы четыре многочлена $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$, $a_4(\lambda)$, определяемые из таблицы:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	\dots	a_n
$a_1(\lambda)$	0	0	1	1	0	0	1	\dots	\dots
$a_2(\lambda)$	0	1	1	0	0	1	1	\dots	\dots
$a_3(\lambda)$	1	1	0	0	1	1	0	\dots	\dots
$a_4(\lambda)$	1	0	0	1	1	0	0	\dots	\dots

В столбце для коэффициента a_i все единицы следует заменить на величину \bar{a}_i , а все нули — на величину \underline{a}_i .

Доказательство этой удивительной теоремы основано на принципе аргумента и не сложно. Его можно найти в первом томе книги Д.П. Кима из списка литературы.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Проверьте устойчивость уравнений с характеристическими многочленами:

а) $(\lambda + 2)(\lambda + 3)$; б) $(\lambda^2 + 5\lambda + 6)$; в) $(\lambda^5 + \lambda^3 + 1)(\lambda - 1)$;

г) $(\lambda^2 + 4)(\lambda + 1)$ д) $(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda)$.

2. Проверьте устойчивость звеньев, заданных передаточными функциями:

$$\text{а) } W(s) = \frac{2(s+2)}{s(s^2+0.1s+2)}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{s+2}{0.1s+2}.$$

3. По критерию Рауса—Гурвица проверьте устойчивость уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } x^{(3)} + 2x^{(2)} + x^{(1)} + x &= 0; & \text{б) } 2x^{(3)} + x^{(2)} + x^{(1)} + x &= 1; \\ \text{в) } x^{(5)} + 2x^{(4)} + 3x^{(3)} + 2x^{(2)} + x^{(1)} + x &= u(t). \end{aligned}$$

4. При каких α и β будут устойчивы решения уравнений:

$$\text{а) } x^{(3)} + \alpha x^{(2)} + 2x^{(1)} + \beta x = 0; \quad \text{б) } x^{(3)} + \alpha x^{(2)} + \beta x^{(1)} + 3x = 1 ?$$

5. С помощью условия Стодолы проверьте устойчивость уравнений:

$$\text{а) } x^{(5)} + 2x^{(2)} + x^{(1)} - x = 0; \quad \text{б) } x^{(4)} + x^{(3)} - x^{(1)} + x = 1;$$

6. Постройте годографы Михайлова для уравнений:

$$\text{а) } x^{(1)} - 2x = 0; \quad \text{б) } x^{(1)} + 2x = 0; \quad \text{в) } x^{(1)} + 2 = 0.$$

Проверьте устойчивость по критерию Михайлова.

7. Проверьте устойчивость системы с передаточной функцией $W(s) = \frac{W_1}{1+W_1}$, $W_1(s) = \frac{2}{1+2s}$: а) по критерию Михайлова; б) по критерию Найквиста.

8. Покажите, что передаточная функция $W = \frac{W_1}{1+W_1} \doteq \frac{W'_1}{1+W'_1W'_2}$ допускает два различных представления: $W'_1 = W_1, W'_2 = 1$ и $W'_1 = 1, W'_2 = 1/W_1$. В обоих случаях проверьте по Найквисту устойчивость при $W_1(s) = \frac{2}{1+2s}$. Объясните результат. Проверьте соответствие каждого из представлений условиям теоремы Найквиста.

9. По заданным передаточным функциям разомкнутой системы исследуйте устойчивость замкнутой системы с помощью критерия Найквиста:

$$\text{а) } W(s) = \frac{20}{s-2}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{1}{s-2}; \quad \text{в) } W(s) = \frac{(s+1)}{s(s-2)};$$

$$\text{г) } W(s) = \frac{20(s+1)}{s(s-2)}; \quad \text{д) } W(s) = \frac{10e^{-0.2s}}{s+1}; \quad \text{е) } W(s) = \frac{10e^{-2s}}{s+1}.$$

10. По заданным передаточным функциям разомкнутой системы определите область устойчивости замкнутой системы:

$$\text{а) } W(s) = \frac{k}{(s-2)^2}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{k}{s(s-2)}; \quad \text{в) } W(s) = \frac{4}{(Ts+2)^2}.$$

11. Проверьте устойчивость интервальных многочленов:

$$\text{а) } \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad a_2 \in [1; 2], \quad a_1 \in [1; 2], \quad a_0 \in [1; 2];$$

$$\text{б) } \lambda^4 + a_1\lambda^3 + 2\lambda^2 + a_3\lambda + 1, \quad a_1 \in [1; 3], \quad a_3 \in [0,1; 0,4].$$

12. Покажите, что линейная система с импульсной функцией $w(t) = \frac{1}{t+1}$ (см. упражнение 11 на с. 57) при любом финитном ограниченном воздействии $u(t)$ имеет выход $x(t)$, сходящийся при $t \rightarrow \infty$ к нулю (и как следствие, сходящиеся однородные движения), но в то же время имеет расходящуюся переходную характеристику, т. е. неустойчива по определению 7. (*Указание:* используйте соотношение $x(t) = \int_0^\infty u(\tau)w(t-\tau)d\tau$ из раздела 2.2 для $u(0 \leq t \leq 1) = 1$, $u(t > 1) = 0$). Сравните полученный результат с утверждением следствия теоремы 3 на с. 63.

Глава 4

Линейные системы в нормальной форме первого порядка

Для описания линейных систем управления удобно использовать дифференциальные уравнения в *нормальной форме первого порядка*

$$\begin{aligned}v^{(1)}(t) &= Av(t) + Bu(t), \\x(t) &= Cv(t), \quad t \geq 0, \\v(t) &\in \mathbb{R}^n, \quad x(t), u(t) \in \mathbb{R}, \\A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad C \in \mathbb{R}^{1 \times n}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Установим связь системы (4.1) с линейным дифференциальным уравнением без переменных $v(t)$:

$$(\hat{s}^n + a_{n-1}\hat{s}^{n-1} + \dots + a_0)x(t) = (b_{n-1}\hat{s}^{n-1} + \dots + b_0)u(t).\tag{4.2}$$

Здесь, как и ранее, \hat{s}^k обозначает оператор k -й производной $\hat{s}^k x \doteq x^{(k)}$; $x = x(t)$, $u = u(t)$ — дифференцируемые функции времени, определенные на положительной полуоси $t \geq 0$. Начальные условия $x(0), x^{(1)}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ не обязательно нулевые.

Начнем с однородного уравнения

$$(\hat{s}^n + a_{n-1}\hat{s}^{n-1} + \dots + a_0)x(t) = 0.\tag{4.3}$$

Нетрудно увидеть, что оно равносильно матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Определим *вектор состояния* $v(t) \doteq \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Матричное уравнение запишется кратко

$$v^{(1)}(t) = Av(t). \quad (4.5)$$

4.1 Общее решение однородного уравнения. Матричная экспонента.

Покажем, как с помощью матричной записи (4.5) вычислить решение

$$x(t) = Cv(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} v(t)$$

однородного уравнения (4.3) с начальными условиями $v(0)$ в произвольный момент времени t .

Определим понятие *экспоненты* e^A от матрицы A . Представим решение $v(t)$ в виде ряда Тейлора:

$$v(t) = v(0) + v^{(1)}(0) \cdot t + v^{(2)}(0) \cdot \frac{t^2}{2} + \dots + v^{(n)}(0) \cdot \frac{t^n}{n!} + \dots$$

Ввиду равенства $v^{(1)} = Av$ получим ряд

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + Av(0)t + A^2v(0)\frac{t^2}{2} + \dots + A^n v(0)\frac{t^n}{n!} + \dots = \\ &= \left(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \dots + \frac{(At)^n}{n!} + \dots \right) v(0). \end{aligned}$$

Ряд в скобках абсолютно сходится для любой квадратной матрицы A и ко-

нечного t . Его естественно назвать *экспонентой от At* :

$$e^{At} \doteq I + At + \frac{(At)^2}{2} + \dots + \frac{(At)^n}{n!} + \dots \quad (4.6)$$

Установим свойства матричной экспоненты.

1. Проверим соотношение $e^{As+At} = e^{As}e^{At}$. Поскольку для абсолютно сходящихся рядов порядок суммирования можно менять, имеем

$$\begin{aligned} e^{As}e^{At} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i s^i}{i!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(\sum_{i+j=k} \frac{s^i t^j}{i!j!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(s+t)^k}{k!} = e^{A(s+t)} = e^{As+At}. \end{aligned}$$

2. Положив $s = -t = 1$, получим, что матричная экспонента e^A обратима для любой матрицы A , и $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

3. Заметим, что функция e^{At} дифференцируется «обычным способом»:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At},$$

что непосредственно следует из ее определения через ряд.

4. Если матрица A имеет обратную, то при условии $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-At} = 0$ верно соотношение

$$\int_0^{\infty} e^{-A\tau} d\tau = A^{-1}, \quad (4.7)$$

которое также следует из определения (4.6). Действительно, определим функцию

$$S(\theta) \doteq \int_0^{\theta} e^{-A\tau} d\tau.$$

Представим экспоненту под интегралом в виде ряда:

$$S(\theta) \doteq \int_0^{\theta} \left(I - A\tau + A^2 \frac{\tau^2}{2} - \dots + A^n \frac{\tau^n}{n!} (-1)^n + \dots \right) d\tau.$$

После интегрирования получим

$$\begin{aligned} S(\theta) &\doteq I \cdot \theta - A \frac{\theta^2}{2} + A^2 \frac{\theta^3}{2 \cdot 3} - \dots + A^n \frac{\theta^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n + \dots = \\ &= A^{-1}(I - e^{-A\theta}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-At} = 0$, то $S(\infty) = A^{-1}$. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-A\tau} d\tau = S(\infty) = A^{-1}.$$

Мы получили, что любое решение однородного уравнения может быть записано через матричную экспоненту:

$$v(t) = e^{At}v(0), \quad v(0) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.9)$$

Обратное тоже верно: любая функция вида $e^{At}v(0)$ является решением уравнения (4.5), что следует из установленных выше свойств матричной экспоненты.

Вычисление матричной экспоненты в Scilab:

```
A=[1 2; 0 1] // исходная матрица
expm(A) // матричная экспонента от матрицы A
```

Следствие 3. *Линейное многообразие V_0 решений однородной системы $v^{(1)}(t) = Av(t)$ имеет размерность n .*

Следствие 4. *Линейное многообразие $X_0 = CV_0$ решений $x(t) = Cv(t)$ однородной системы $v^{(1)}(t) = Av(t)$ имеет размерность n .*

Заметим, что запись решения через матричную экспоненту позволяет легко вычислять $v(t)$, но не позволяет увидеть качественные свойства решения, как ведет себя график $v(t)$. Исследуем более детально множество решений однородного уравнения (4.5)

$$v^{(1)}(t) = Av(t).$$

Убедимся, что его решениями являются функции вида $v(t) = ce^{\lambda t}$ при соответствующем выборе комплексного вектора $c \in \mathbb{C}^n$ и комплексного числа

$\lambda \in \mathbb{C}$. Подставим функцию $ce^{\lambda t}$ в уравнение, получим $\lambda ce^{\lambda t} = Ace^{\lambda t}$. Отсюда следует $(\lambda I - A)c = 0$. Нетривиальные решения $c \neq 0$ существуют, только если $\det(\lambda I - A) = 0$. Последнее является характеристическим уравнением для матрицы A и для дифференциального уравнения (4.5). Собственные векторы $c_i, c_j \in \mathbb{C}^n$ матрицы A , соответствующие различным числам $\lambda_i \neq \lambda_j$, линейно независимы [6, с. 84]. Если все корни характеристического уравнения различны, матрица A называется *матрицей простой структуры* [6, с. 85]. В этом случае общее решение однородного уравнения (4.5) имеет вид

$$v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Если характеристическое уравнение имеет корень λ_1 кратности k , то общее решение состоит из функций [5, с. 93]

$$v(t) = (c_{11} + c_{12}t + \dots + c_{1k}t^{k-1}) e^{\lambda_1 t} + \dots + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad (4.10)$$

Здесь $c_{11}, \dots, c_{1k} \in \mathbb{C}^n$ — любой набор из k линейно независимых векторов, являющихся решениями уравнения $(\lambda_1 I - A)c = 0$. Наложением дополнительных условий на векторы c_i, c_{pq} множество решений сужается до действительнозначных функций $v(t) \in \mathbb{R}^n$.

Приведенные выражения очень похожи на формулы общего решения однородного скалярного (нематричного) уравнения (1.2), рассмотренного в первой главе. Отличие состоит в том, что здесь c_i не числа, а векторы, и вычислить их сложнее. Функции $x(t) \in \mathbb{R}$ и $v(t) \in \mathbb{R}^n$ связаны равенством $x(t) = Cv(t)$.

Перейдем к неоднородным системам. Для установления связи матричной записи (4.1) с линейным дифференциальным уравнением (4.2) без переменных состояния нам понадобится матричная форма записи более сложная, чем (4.4).

Из уравнения (I)

$$\hat{s}v_1 = -a_0v_3 + b_0u. \quad (4.13)$$

Из уравнения (II)

$$\hat{s}v_2 = v_1 - a_1v_3 + b_1u. \quad (4.14)$$

Из уравнения (III)

$$\hat{s}v_3 = v_2 - a_2v_3 + b_2u. \quad (4.15)$$

Из уравнения (IV)

$$x = v_3. \quad (4.16)$$

Чтобы исключить переменную v_1 , продифференцируем (4.14) и подставим $\hat{s}v_1$ из уравнения (4.13). Затем так же исключим v_2 , продифференцировав (4.15) дважды и подставив \hat{s}^2v_2 из продифференцированного уравнения (4.14). В результате получим

$$\hat{s}^3v_3 + a_2\hat{s}^2v_3 + a_1\hat{s}v_3 + a_0v_3 = b_2\hat{s}^2u + b_1\hat{s}u + b_0u.$$

После замены (IV) $v_3 = x$ приходим к уравнению (4.2).

2. Обрато, пусть дано уравнение (4.2). Посмотрев на уравнения (IV) (4.16), (III) (4.15), (II) (4.14), введем переменные

$$(IVa) \quad v_3 \doteq x,$$

$$(IIIa) \quad v_2 \doteq \hat{s}v_3 + a_2v_3 - b_2u,$$

$$(IIa) \quad v_1 \doteq \hat{s}v_2 + a_1v_3 - b_1u.$$

Для получения системы (4.12) не хватает уравнения с $\hat{s}v_1$. Дифференцируя (IIa), (IIIa), получим

$$\begin{aligned} v_3 &\doteq x, \\ \hat{s}^2v_2 &\doteq \hat{s}^3v_3 + a_2\hat{s}^2v_3 - b_2\hat{s}^2u, \\ \hat{s}v_1 &\doteq \hat{s}^2v_2 + a_1\hat{s}v_3 - b_1\hat{s}u. \end{aligned}$$

Подставим \hat{s}^2v_2 в третье уравнение:

$$\hat{s}v_1 = \hat{s}^3v_3 + a_2\hat{s}^2v_3 + a_1\hat{s}v_3 - b_2\hat{s}^2u - b_1\hat{s}u.$$

Учитывая уравнение (4.2) с $v_3 \doteq x$, можем написать

$$(Ia) \quad \hat{s}v_1 = -a_0v_3 + b_0u.$$

Уравнения (Ia)–(IVa) есть система (4.12).

3. Установим связь между начальными условиями $x(0)$, $[\hat{s}x](0)$, $[\hat{s}^2x](0)$ и вектором $v(0)$. Для произвольного t имеем уравнения (IIa)–(IVa), из которых получаем

$$\begin{aligned} v_3 &\doteq x, \\ v_2 &\doteq \hat{s}x + a_2x - b_2u, \\ v_1 &\doteq \underbrace{(\hat{s}^2x + a_2\hat{s}x - b_2\hat{s}u)}_{\hat{s}v_2} + a_1x - b_1u, \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{s}x \\ \hat{s}^2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_2\hat{s}u - b_1u \\ b_2u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ неособенная (ее определитель равен 1), а функция u задана, последнее уравнение устанавливает взаимно-однозначное соответствие между вектором v и функциями x , $\hat{s}x$, \hat{s}^2x в любой момент времени, в том числе $t = 0$. Теорема доказана. \square

4.3 Частное решение неоднородного уравнения

Перейдем к неоднородному уравнению $v^{(1)}(t) = Av(t) + Bu(t)$. Получим формулу для частного решения $v(t)$ в виде интеграла свертки (см. определение 4 гл. 1). Это можно сделать двумя способами. Первый состоит в использовании матричной экспоненты. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что искомым частным решением является функция

$$v(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (4.17)$$

Действительно, вынесем экспоненту e^{At} за интеграл и после дифференцирования получим:

$$\begin{aligned} v^{(1)}(t) &= \left(\frac{d}{dt} e^{At} \right) \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau + e^{At} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t (\dots) \right) = \\ &= A e^{At} \int_0^t (\dots) + e^{At} (e^{-At} B u(t)) = \\ &= A \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + B u(t) = A v(t) + B u(t). \end{aligned}$$

Вследствие формулы (1.17) системы (4.1) сверткой, в которой роль импульсной функции играет $w(t) \doteq C e^{At} B$:

$$x(t) = \int_0^t w(t-\tau) u(\tau) d\tau = C v(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (4.18)$$

Получим выражение для импульсной функции вторым способом. Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнений системы в нормальной форме (4.1), получим:

$$sV(s) = AV(s) + BU(s), \quad X(s) = CV(s).$$

Отсюда следует значение передаточной функции

$$W(s) \doteq \frac{X(s)}{U(s)} = C (sI - A)^{-1} B. \quad (4.19)$$

Импульсная функция $w(t)$ есть прообраз Лапласа для $W(s)$:

$$C (sI - A)^{-1} B = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} w(\tau) d\tau. \quad (4.20)$$

Для нахождения функции $w(t)$ из последнего равенства воспользуемся по-

лученным выше соотношением (4.7): $(sI - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-(sI-A)\tau} d\tau$. Имеем

$$C(sI - A)^{-1}B = \int_0^\infty C e^{-(sI-A)\tau} B d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} C e^{A\tau} B d\tau,$$

то есть $w(t) = C e^{At} B$.

В итоге общее решение неоднородного уравнения (4.1) имеет вид

$$x(t) \doteq X_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (4.21)$$

где $X_0 = C V_0$, $V_0 \doteq \{v(t) : v^{(1)} = Av, v(0) \in \mathbb{R}^n\}$ — множество всех решений (4.10) однородной системы $v^{(1)} = Av$.

4.4 Устойчивость системы в нормальной форме первого порядка

Формула (4.21) для общего решения неоднородного уравнения (4.1) позволяет сформулировать критерий устойчивости, аналогичный критерию устойчивости уравнения (3.1) (см. теорему 3).

Теорема 7. Система в нормальной форме первого порядка (4.1) устойчива по входу тогда и только тогда, когда все решения однородного уравнения $v^{(1)}(t) = Av(t)$ сходятся при $t \rightarrow \infty$ к нулю.

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 3.

Для матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определим ее характеристический многочлен $a(\lambda) \doteq \det(\lambda I - A)$.

Определение. Матрица A называется *гурвицевой*, или *устойчивой*, если устойчив характеристический многочлен $a(\lambda)$.

Утверждение 14. Пусть матрица A имеет каноническую форму Фробениуса $A = A_F$ (4.11). Тогда ее характеристический многочлен $\det(\lambda I - A)$ есть $a(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$.

Доказательство. Разложим определитель $\det(\lambda I - A)$ по 1-й строке:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \doteq D_n = \\ &= \lambda D_{n-1} + (-1)^{n-1} a_0 \det \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ & -1 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \lambda \\ & & & -1 \end{bmatrix}}_{(-1)^{n-1} (n-1) \times (n-1)} = \lambda D_{n-1} + a_0. \end{aligned}$$

Разлагая так же определители D_{n-1}, \dots, D_1 , получим последовательность равенств

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= \lambda D_{n-2} + a_1, \\ &\dots \dots \dots \\ D_2 &= \lambda D_1 + a_{n-2}, \\ D_1 &= \lambda \cdot 1 + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Поднимаясь по этой цепочке «снизу вверх», получим

$$\begin{aligned} D_2 &= \lambda(\lambda \cdot 1 + a_{n-1}) + a_{n-2} = \lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ D_n &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 \end{aligned}$$

(эти равенства называют *схемой Горнера* вычисления значения многочлена в точке λ). Утверждение доказано. \square

4.4.1 «Неустойчивость» свойства устойчивости матриц

Рассмотрим матрицу

$$A_\varepsilon \doteq \begin{bmatrix} -1 & 100 & & 0 \\ & -1 & 100 & \\ & & -1 & \ddots \\ & & & \ddots & 100 \\ \varepsilon & & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

У нее отличны от нуля только элементы -1 , 100 на двух диагоналях и элемент ε в левом нижнем углу. Проверим устойчивость характеристического многочлена $\det(\lambda I - A_\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_\varepsilon) &= \det \begin{bmatrix} (\lambda + 1) & (-100) & & 0 \\ & (\lambda + 1) & (-100) & \\ & & (\lambda + 1) & \ddots \\ & & & \ddots & (-100) \\ -\varepsilon & & & & (\lambda + 1) \end{bmatrix} = \\ &= (\lambda + 1)^n + (-\varepsilon)(-1)^{n-1}(-100)^{n-1} = \\ &= (\lambda + 1)^n - 100^{n-1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Этот многочлен имеет корни $\lambda = -1 + \sqrt[n]{100^{n-1}\varepsilon}$. При $\varepsilon = 0$ корень кратности n равен -1 , многочлен устойчив. При $\sqrt[n]{100^{n-1}\varepsilon} > 1$ корень положительный, и многочлен неустойчив. Следовательно, при увеличении ε от 0 до значений $\varepsilon > \frac{1}{100^{n-1}}$ корень переходит из левой в правую полуплоскость и многочлен становится неустойчивым. При $n = 9$ неустойчивость появляется уже при $\varepsilon > 10^{-16}$, что сравнимо с погрешностью разрядной сетки компьютера при вычислениях с двойной точностью в мантиссе.

Заметим, что преобразование подобия $A_\varepsilon \rightarrow A'_\varepsilon \doteq T A_\varepsilon T^{-1}$ не изменяет определителя и, как следствие, не изменяет характеристического многочлена $\det(\lambda I - A_\varepsilon) = \det(\lambda I - A'_\varepsilon)$. Отсюда следует, что для всех матриц A'_ε , получаемых преобразованием подобия из матрицы A_ε , свойство устойчивости так же чувствительно к малым изменениям элементов, как и для матрицы

A_ε .

Этот пример показывает необходимость использования *количественной меры* устойчивости. Такой мерой могла бы быть функция, которая для каждой матрицы A показывает степень близости к области неустойчивости через точную оценку верхней границы норм решений $v(t)$ уравнения $v^{(1)}(t) = Av(t)$. Чем менее устойчивы решения уравнения, тем больше их нормы и тем ближе матрица A к неустойчивости. Эта идея будет подробно рассмотрена в следующем разделе. Заметим, что количественный критерий, основанный на годографе Найквиста (раздел 3.4), не имеет прямой связи с решениями дифференциального уравнения.

4.5 Уравнение Ляпунова

Получение количественных критериев устойчивости, основанных на верхней оценке норм решений, связано с *уравнением Ляпунова*. Доказываемая в этом разделе теорема занимает центральное место в анализе устойчивости дифференциальных уравнений, как линейных, так и нелинейных (глава 7).

Нам понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры.

Определение. Квадратная вещественная матрица H называется *положительно определенной* ($H > 0$), если квадратичная форма $x^T H x$ положительна (> 0) для любого ненулевого вектора x . Матрица H называется *неотрицательно определенной* ($H \geq 0$), если квадратичная форма $x^T H x$ неотрицательна (≥ 0) для любого ненулевого вектора x .

Известно, что любая вещественная симметричная квадратная матрица $H = H^T$ допускает разложение $H = P \Lambda P^T$, где P — ортогональная матрица ($P^T P = I$) и $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица из собственных чисел H , которые все вещественны. Если H положительно определена, то все λ_i положительны, и наоборот.

Утверждение 15. Пусть $H > 0$ — симметричная вещественная матрица $H = H^T$ и в разложении $H = P \Lambda P^T$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, собственные числа H упорядочены по убыванию: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$. Тогда

отношение квадратичных форм $\frac{v^\top H v}{v^\top v}$ (отношение Рэля) ограничено сверху и снизу величинами $\lambda_1 \geq \frac{v^\top H v}{v^\top v} \geq \lambda_n$ и эти неравенства неулучшаемы.

Доказательство. Сделаем замену переменных $v = P\varphi$:

$$\frac{v^\top H v}{v^\top v} = \frac{\varphi^\top P^\top H P \varphi}{\varphi^\top P^\top P \varphi} = \frac{\varphi^\top \Lambda \varphi}{\varphi^\top \varphi} = \frac{\lambda_1 \varphi_1^2 + \dots + \lambda_n \varphi_n^2}{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2}.$$

Последнее отношение форм можно представить двояким образом:

$$\frac{\lambda_1 \varphi_1^2 + \dots + \lambda_n \varphi_n^2}{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2} = \begin{cases} \lambda_1 \frac{\varphi_1^2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \varphi_2^2 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \varphi_n^2}{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2} \leq \lambda_1 & (\Leftrightarrow \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \leq 1), \\ \lambda_n \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \varphi_1^2 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \varphi_{n-1}^2 + \varphi_n^2}{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2} \geq \lambda_n & (\Leftrightarrow \frac{\lambda_i}{\lambda_n} \geq 1). \end{cases}$$

Остается заметить, что в полученных неравенствах верхняя граница λ_1 достигается при выборе $\varphi_1 = 1$, $\varphi_i = 0$, $i > 1$, а нижняя граница λ_n достигается при выборе $\varphi_n = 1$, $\varphi_i = 0$, $i < n$. \square

Сформулируем теорему А. М. Ляпунова.

Теорема 8. Пусть спектр $\{\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)\}$ матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ не имеет точек, симметричных относительно мнимой оси: $\lambda_i(A) + \overline{\lambda_j(A)} \neq 0$, где черта обозначает комплексное сопряжение. И пусть $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — решение матричного уравнения Ляпунова

$$A^\top H + H A = -I. \quad (4.22)$$

Тогда: 1) матрица H существует и единственна;

2) она симметрична $H^\top = H$;

3) устойчивость (гурвицевость) матрицы A влечет строгую положительную определенность $H > 0$;

4) обратно, если $H > 0$, то матрица A устойчива.

Доказательство. 1. Существование и единственность H следует из одной теоремы М. Г. Крейна [8, § 2].

2. Симметричность H следует из свойства единственности и того факта, что при транспонировании уравнение Ляпунова не изменяется, а матрица H заменяется на H^\top . Ввиду единственности $H = H^\top$.

3. Пусть матрица A устойчива, т. е. для всех $i \in \overline{1, n}$ $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$. Тогда все решения уравнения $v^{(1)}(t) = Av(t)$ устойчивы, $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Ввиду уравнения $A^\top H + HA = -I$ получаем

$$\frac{d}{dt} [v(t)^\top H v(t)] = v(t)^\top (A^\top H + HA) v(t) = -v(t)^\top v(t).$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d}{dt} [v(t)^\top H v(t)] dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)^\top H v(t) - v(0)^\top H v(0) = \\ &= - \int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt. \end{aligned}$$

Учитывая сходимость решений к нулю, для *устойчивых* систем приходим к соотношению

$$v(0)^\top H v(0) = \int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt. \quad (4.23)$$

Подынтегральное выражение неотрицательно и при любых ненулевых начальных условиях $v(0) \neq 0$ отлично от нуля, поэтому интеграл в правой части строго положителен, $v(0)^\top H v(0) > 0$, и матрица H строго положительно определена.

4. Пусть H — решение уравнения Ляпунова (4.22) и $H > 0$. Ввиду утверждения 15 последнее означает, что для любого вектора v выполнены неравенства

$$\lambda_1 v^\top v \geq v^\top H v \geq \lambda_n v^\top v > 0.$$

Определим функцию $V(t) \doteq v(t)^\top H v(t)$. Для ее производной верно

$$\frac{d}{dt} V(t) = v(t)^\top (A^\top H + HA) v(t) = -v(t)^\top v(t) < 0$$

(см. (4.22)). Отсюда следует неравенство $-\lambda_1 \frac{d}{dt} V(t) = \lambda_1 v^\top v \geq V(t)$ и неравенство $\frac{dV}{V} \leq -\frac{dt}{\lambda_1}$. После интегрирования получим

$$\ln V(t) - \ln V(0) \leq -\frac{t}{\lambda_1},$$

следовательно, $\frac{V(t)}{V(0)} \leq e^{-\frac{t}{\lambda_1}}$ и $0 < V(t) \leq V(0)e^{-\frac{t}{\lambda_1}}$, поэтому $V(t) \rightarrow 0$ при

$t \rightarrow \infty$. Ввиду соотношения

$$V(t) = v^T H v \geq \lambda_n v^T v > 0$$

получаем сходимость $v = v(t) \rightarrow 0$. Поскольку начальные условия $v(0)$ произвольны, все решения $v(t)$ сходятся к нулю, поэтому матрица A устойчива. \square

Теорема Ляпунова дает еще один метод анализа устойчивости матричного линейного дифференциального уравнения $v^{(1)} = Av$, основанный на решении H уравнения Ляпунова. Вычисляется спектр H , и если все собственные числа H строго положительны, то дифференциальное уравнение устойчиво. Существенно, что H всегда мало меняется при малых возмущениях элементов матрицы A [8], и спектр H вычисляется значительно проще, чем спектр A .

Программа для среды Scilab имеет вид:

```
A=[1 2; 2 1] // матрица дифференциального уравнения;
I=eye(A) // единичная матрица;
H=lyap(A,-I,'c') // решение уравнения Ляпунова;
spes(H) // вычисление спектра H;
// если в спектре H нет отрицательных значений,
// то матрица A устойчива
```

4.6 Количественная мера устойчивости

Равенство $v(0)^T H v(0) = \int_0^\infty v(t)^T v(t) dt$ (4.23), в котором участвует матрица H — решение уравнения Ляпунова, дает возможность предложить для *устойчивой* системы $v^{(1)}(t) = Av(t)$ *количественную меру* устойчивости. В правой части уравнения (4.23) стоит интеграл, который можно рассматривать как квадрат нормы векторнозначной функции $v(t)$ на полубесконечном интервале $t \geq 0$. Чем менее устойчиво решение $v(t)$, тем больше его норма. Отталкиваясь от этой идеи (см. предисловие в [7]), приходим к следующему

количественному показателю устойчивости уравнения с матрицей A :

$$\kappa(A) \doteq \sup_{v(0) \neq 0} \frac{\int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt}{v(0)^\top v(0)}. \quad (4.24)$$

Ввиду соотношения $v(t) = e^{At}v(0)$ значение интеграла в числителе пропорционально величине квадратичной формы $v(0)^\top v(0)$, поэтому дробь в правой части зависит только от направления вектора $v(0)$. Супремум по начальным условиям $v(0)$ позволяет выбрать наименее устойчивое решение, и через это охарактеризовать устойчивость уравнения в целом.

Пусть $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора:

$$\|v\| \doteq \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{v^\top v}.$$

Норму матрицы определим соотношением $\|A\| \doteq \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ [6, с. 410]. Из этого определения сразу следует неравенство $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$.

Утверждение 16. Для вещественной симметричной неотрицательно определенной матрицы $H = H^\top \geq 0$ верны соотношения

$$\|H\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Hv\|}{\|v\|} = \lambda_1 = \sup_{v \neq 0} \frac{v^\top H v}{v^\top v}. \quad (4.25)$$

Доказательство. Заметим, что умножение на ортогональную матрицу не изменяет евклидовой нормы вектора ($\|Px\| = \sqrt{x^\top P^\top P x} = \sqrt{x^\top x} = \|x\|$), поэтому верны равенства

$$\begin{aligned} \sup_{v \neq 0} \frac{\|Hv\|}{\|v\|} &= \sup_{\varphi = P^\top v \neq 0} \frac{\|P \Lambda P^\top v\|}{\|P^\top v\|} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|\Lambda \varphi\|}{\|\varphi\|} = \\ &= \sup_{\varphi \neq 0} \sqrt{\frac{\varphi^\top \Lambda^2 \varphi}{\varphi^\top \varphi}} = \lambda_1 = \sup_{v \neq 0} \frac{v^\top H v}{v^\top v}. \end{aligned}$$

(в последних двух равенствах применено утверждение 15). □

Следствие 5. При условии устойчивости матрицы A верны равенства

$$\kappa(A) = \sup_{v(0) \neq 0} \frac{\int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt}{v(0)^\top v(0)} = \sup_{v(0) \neq 0} \frac{v(0)^\top H v(0)}{v(0)^\top v(0)} = \|H\|.$$

Доказательство. Вытекает из соотношений $\int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt = v(0)^\top H v(0)$

$$(4.23) \text{ и } \|H\| = \sup_{v \neq 0} \frac{v^\top H v}{v^\top v} \quad (4.25). \quad \square$$

Упражнение 25. Чему равен $\kappa(A)$ для неустойчивой матрицы A ? (Указание: воспользуйтесь определением (4.24).)

Упражнение 26. Найдите значение $\kappa(I)$.

Вычисление показателя $\kappa(A)$ в Scilab:

```
H=lyap(A,-eye(A),'c') // решение уравнения Ляпунова;
спрес(H) // вычисление спектра решения;
// если в спектре нет отрицательных значений, то
карра=norm(H,2)
// в противном случае матрица A неустойчива
```

Упражнение 27. Почему показатель $\kappa(A)$ более естественно называть показателем *неустойчивости*?

Пример 5. Вычислим показатель устойчивости для системы с отрицательной обратной связью (рис. 4.1). Предполагаем $a > 0$.

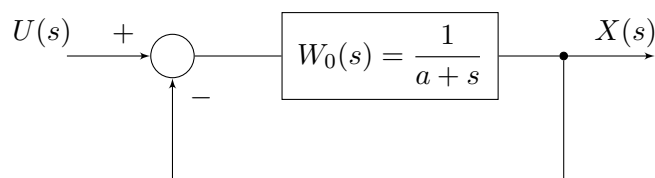


Рис. 4.1: Система с отрицательной обратной связью

Передаточная функция замкнутой системы $W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} = \frac{1}{(1+a)+s}$. Годограф Найквиста $\nu(i\omega) = W_0(i\omega)$, $\omega \geq 0$ есть полуокружность радиуса $\frac{1}{2a}$ с центром в точке $\frac{1}{2a}$, расположенная в нижней полуплоскости (проверьте предельные случаи $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$). Запас устойчивости по амплитуде (см. рис. 3.8) $K_a = \infty$ не зависит от a . Запас устойчивости по фазе при $a > 1$ не определен.

Вычислим показатель $\kappa(A)$. Дифференциальное уравнение замкнутой системы:

$$x^{(1)}(t) + (1+a)x(t) = u(t).$$

Устойчивость определяется однородным уравнением $x^{(1)} + (1 + a)x(t) = 0$. Матрица A есть число $-(1 + a)$. Решение уравнения Ляпунова $H = \frac{1}{2(1+a)}$. Показатель устойчивости $\kappa(A) = \|H\| = \frac{1}{2(1+a)}$ зависит от a : чем больше a , тем более устойчива система.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Постройте общее решение системы линейных дифференциальных уравнений [5, с. 107–110, 192–199]

$$\begin{cases} v_1^{(1)} = -v_1, \\ v_2^{(1)} = v_3, \\ v_3^{(1)} = -v_2. \end{cases} \quad (4.26)$$

2. Для системы (4.26) вычислите показатель устойчивости $\kappa(A)$.
3. Постройте в Scilab решение системы (4.26) с начальными условиями $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ с помощью функции матричной экспоненты `exrm`.
4. Используя каноническую форму (4.11) и матричную экспоненту, постройте в Scilab решение системы

$$x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + x(t) = 1, \quad t \geq 0$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $x^{(1)}(0) = 0$.

5. Постройте в Scilab с помощью функции матричной экспоненты `exrm` графики импульсной и переходной функций системы

$$\begin{cases} v_1^{(1)}(t) = -v_1(t), \\ v_2^{(1)}(t) = v_3(t), \\ v_3^{(1)}(t) = -v_2(t) + u(t), \\ x(t) = v_3(t). \end{cases} \quad (4.27)$$

6. Получите аналитическое выражение для передаточной функции $W(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$ системы (4.27).

7. Исследуйте, как зависит от значения параметра $c \in [-1; 1]$ количественный показатель устойчивости κ для системы

$$\begin{cases} v_1^{(1)} = -v_1, \\ v_2^{(1)} = cv_3, \\ v_3^{(1)} = -v_2. \end{cases} \quad (4.28)$$

8. Исследуйте, как зависит от значений параметра K показатель устойчивости κ уравнения регулятора Уатта (1.13) из первой главы. Время задержки положите $\tau = 0$.
9. Исследуйте, как зависит от значений двух параметров K, τ показатель устойчивости κ уравнения регулятора Уатта (1.13) из первой главы.
10. Исследуйте, как меняется показатель устойчивости κ системы управления велосипедом из раздела 1.8 первой главы в зависимости от скорости движения V .
11. Исследуйте зависимость показателя устойчивости κ от малого параметра $\varepsilon \in [0, 10^{-12}]$ для системы дифференциальных уравнений $v^{(1)}(t) = A_\varepsilon v(t)$ с матрицей A_ε из раздела 4.4.1.

Глава 5

Дискретные системы

Система, поведение которой описывается функциями $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с областью определения $t \geq 0$ или $t \in T \subset \mathbb{R}$ и областью значений $x(t) \in X \subset \mathbb{R}$, называется *непрерывной*.

Если время дискретное $t \in T \subset \mathbb{N}$ или $T \subset \mathbb{Z}$, то система называется *дискретной*, $x(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

Если время дискретное $t \in T \subset \mathbb{N}$ или $T \subset \mathbb{Z}$ и область значений тоже дискретная $x(t) \in X \subset \mathbb{Z}$, то система называется *цифровой*, $x(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Компьютерное моделирование, ввиду конечности разрядной сетки, основано на натуральных числах. С этой точки зрения все системы, представленные в компьютерных программах, являются цифровыми. С другой стороны, в представлении функций $T \rightarrow X$ числовыми массивами количество $|T|$ значений аргумента, как правило, существенно меньше мощности множества X допустимых значений функции. Последнее ограничено только разрядностью сетки компьютера. Это позволяет считать, что к условиям компьютерного моделирования наиболее близки именно *дискретные* системы.

Для теоретического анализа дискретных систем можно допустить, что система непрерывна, а соответствующие значения времени и переменных получаются в результате проекции непрерывных множеств на узлы разрядной сетки.

Ряд результатов (например, по устойчивости) может быть получен непосредственно в рамках дискретного рассмотрения. В дискретном случае временные зависимости представляются как точки конечномерного евклидова пространства, что позволяет применять более простой математический аппа-

рат, чем в случае непрерывного времени, когда пространства имеют бесконечную размерность. Как следствие, многие утверждения из теории линейных динамических систем просто и естественно получаются именно в рамках дискретного представления. Примеры приведены в главе 9.

5.1 Дискретизация

В этом разделе рассмотрим способы получения разностных уравнений, описывающих дискретные системы. Получение уравнений дискретной системы из уравнений для непрерывной системы называется дискретизацией. Начнем со звена интегрирования $x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ (см. рис. 5.1).

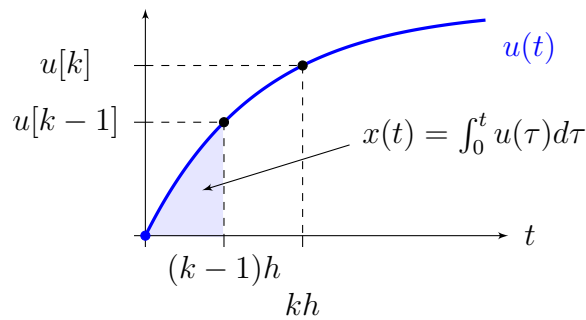


Рис. 5.1: Дискретизация звена интегрирования

Выберем шаг по времени h . Целочисленный временной аргумент будем писать в квадратных скобках: $x[k-1] \doteq x((k-1)h)$.

1. Приближенное интегрирование по формуле прямоугольников приводит к выражению $x[k] - x[k-1] = u[k] \cdot h$.

2. Приближенное интегрирование по формуле трапеций приводит к выражению $x[k] - x[k-1] = \frac{u[k] + u[k-1]}{2} \cdot h$.

Поменяв в этих формулах местами вход и выход, получим два дискретных представления для звена дифференцирования:

$$1) u[k] - u[k-1] = x[k] \cdot h \quad \Rightarrow$$

$$x[k] = \frac{u[k] - u[k-1]}{h}; \quad (5.1)$$

$$2) \quad u[k] - u[k-1] = \frac{x[k] + x[k-1]}{2} \cdot h \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x[k] + x[k-1]}{2} = \frac{u[k] - u[k-1]}{h} \quad \Rightarrow \quad x[k] = -x[k-1] + \frac{2}{h} (u[k] - u[k-1]). \quad (5.2)$$

Формулу (5.1) еще называют формулой Эйлера.

<необязательный материал>

Пример 6. Дискретизируем по формулам (5.1) и (5.2) систему

$$v^{(1)}(t) = Av(t) \quad (5.3)$$

с целью получить разностное уравнение $v[k+1] = A_d v[k]$. Пусть $p[k] \doteq v^{(1)}(kh)$ — отсчеты производной функции $v(t)$. Из (5.3) имеем

$$p[k] = Av[k]. \quad (5.4)$$

По формуле Эйлера (5.1) $p[k] = \frac{v[k] - v[k-1]}{h}$, тогда из (5.4) следует

$$v[k] = (I + hA)v[k-1], \quad A_d = I + hA. \quad (5.5)$$

По формуле трапеций (5.2) $\frac{p[k] + p[k-1]}{2} = \frac{v[k] - v[k-1]}{h}$. С учетом (5.4) получаем

$$v[k] = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I + \frac{h}{2}A\right)v[k-1], \quad A_d = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I + \frac{h}{2}A\right). \quad (5.6)$$

Проверьте, что тот же результат получится, если в (5.4) производную подставить по формуле Эйлера, а в правой части вместо $v[k]$ использовать среднее значение $\frac{v[k] + v[k-1]}{2}$.

</необязательный материал>

Утверждение 17. Ошибка передаточной функции дискретного звена дифференцирования по формуле Эйлера имеет первый порядок малости по величине $|sh|$:

$$W_1(s) = s \left(1 - \frac{1}{2}sh + O_2\right).$$

Ошибка дифференцирования по формуле трапеций (5.2) имеет второй порядок малости по величине $|sh|$:

$$W_2(s) = s \left(1 - \frac{7}{12}(sh)^2 + O_3\right).$$

Здесь O_k обозначает слагаемое k -го порядка малости:

$$O_k \sim O\left((sh)^k\right).$$

Доказательство. 1. К обеим частям формулы Эйлера (5.1) применим преобразование Лапласа:

$$X(s) = \frac{1}{h} (1 - e^{-sh}) U(s).$$

Вычислим передаточную функцию:

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{h} (1 - e^{-sh}) = \frac{1}{h} \left(1 - \left(1 - sh + \frac{1}{2} (sh)^2 + O_3\right)\right) = \\ &= \frac{1}{h} \left(sh - \frac{1}{2} (sh)^2 + O_3\right) = s \left(1 - \frac{1}{2} sh + O_2\right). \end{aligned}$$

2. Применим преобразование Лапласа к формуле трапеций (5.2):

$$(1 + e^{-sh}) X(s) = \frac{2}{h} (1 - e^{-sh}) U(s).$$

Вычислим передаточную функцию, используя разложение $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$:

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{2}{h} \cdot \frac{1 - e^{-sh}}{1 + e^{-sh}} = \frac{2}{h} \cdot \frac{1 - \left(1 - sh + \frac{1}{2} (sh)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} (sh)^3 + O_4\right)}{1 + \left(1 - sh + \frac{1}{2} (sh)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} (sh)^3 + O_4\right)} = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{sh - \frac{1}{2} (sh)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} (sh)^3 + O_4}{1 - \frac{1}{2} sh + \frac{1}{4} (sh)^2 + O_3} = s \cdot \left(\underbrace{1 - \frac{1}{2} sh + \frac{1}{2 \cdot 3} (sh)^2 + O_3}_{1-a}\right) \times \\ &\quad \times \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} sh - \frac{1}{4} (sh)^2}_{1+a} - \left[\frac{1}{2} sh - \frac{1}{4} (sh)^2\right]^2 + O_3\right) = \\ &= s \cdot \left(1 - \frac{7}{12} (sh)^2 + O_3\right). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. Заметим, что главным моментом является исчезновение слагаемых первой степени при раскрытии скобок в выражении вида $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$. \square

Дискретизация через матричную экспоненту

Пусть дана однородная система с непрерывным временем $v^{(1)}(t) = Av(t)$. Из соотношения $v(h) = e^{Ah}v(0)$ следует разностное уравнение

$$v[k + 1] = A_d v[k], \quad A_d \doteq e^{Ah}. \quad (5.7)$$

Дискретизация однородной системы через матричную экспоненту (5.7) является точной.

Рассмотрим неоднородную систему

$$v^{(1)}(t) = Av(t) + Bu(t).$$

Интегрирование на интервале дискретизации $[0, h]$ приводит к выражению (см. (4.9), (1.17))

$$v(h) = e^{Ah}v(0) + \int_0^h e^{A(h-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Точная дискретизация здесь невозможна, поскольку неизвестны значения $u(t)$ между узлами сетки. При различных способах интерполяции получаются различные формулы приближенной дискретизации.

<Дополнительный материал>

В простейшем случае пусть $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией. Тогда

$$v(h) = e^{Ah}v(0) + \left(\int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau \right) Bu(0). \quad (5.8)$$

Интеграл свертки вычисляется через ряд (4.8):

$$\begin{aligned} \int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau &= e^{Ah} S(h) = \\ &= e^{Ah} \left(I \cdot h - A \frac{h^2}{2} + A^2 \frac{h^3}{2 \cdot 3} - \dots + A^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n + \dots \right). \end{aligned}$$

Если матрица A неособенная, можно использовать явную формулу (4.8)

$$S(h) = A^{-1}(I - e^{-Ah}).$$

В выражении (5.8) моменты времени $0, h$ заменим на $kh, (k + 1)h$. В результате получим дискретную систему

$$\begin{aligned} v[k + 1] &= A_d v[k] + B_d u[k], \\ x[k] &= C v[k] \quad k \geq 1, \\ A_d &\doteq e^{Ah}, \quad B_d \doteq e^{Ah} S(h) B. \end{aligned}$$

</Дополнительный материал>

Дискретизация средствами Scilab

Пусть непрерывная система имеет дробно-рациональную передаточную функцию $W(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$. Предполагаем, что она физически реализуема, т. е. $\deg a(s) > \deg b(s)$. Построим соответствующую дискретную систему в нормальной форме первого порядка

$$\begin{cases} v[k + 1] = A_d v[k] + B_d u[k], \\ x[k] = C_d v[k]. \end{cases} \quad (5.9)$$

Для вычисления матриц A_d, B_d, C_d в среде Scilab достаточно выполнить последовательность команд:

```
s=poly(0,'s');
W(s)=2*s/(s^2+2) // передаточная функция
// Создание записи непрерывной системы:
Sys=syslin('c',W(s));
h=0.1; // шаг временной сетки
Sysd=dscr(Sys,h)
// Матрицы A, B, C дискретной системы:
Sysd.A
Sysd.B
Sysd.C
```

5.2 Построение общего решения разностного уравнения

Рассмотрим разностное уравнение

$$\begin{aligned} x[k+n] + \alpha_{n-1}x[k+n-1] + \dots + \alpha_0x[k] = \\ = \beta_{n-1}u[k+n-1] + \dots + \beta_0u[k], \quad k \in \overline{1, N-n}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Общее решение X (множество всех решений) имеет вид $X = X_0 + x_1$, где X_0 — общее решение однородного уравнения, а x_1 — любое частное решение неоднородного уравнения (см. раздел 1.2).

Найдем множество решений X_0 однородного уравнения

$$x[k+n] + \alpha_{n-1}x[k+n-1] + \dots + \alpha_0x[k] = 0. \quad (5.11)$$

Выпишем решения $x[k]$ как функции момента времени k . Подстановка $x[k] = c\zeta^k$, где $c, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — ненулевые комплексные числа, которые нужно найти, приводит к уравнению

$$c\zeta^{k+n} + c\alpha_{n-1}\zeta^{k+n-1} + \dots + c\alpha_0\zeta^k = 0.$$

Последнее равносильно характеристическому уравнению

$$\zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0 \doteq \alpha(\zeta) = 0. \quad (5.12)$$

Характеристический многочлен $\alpha(\zeta)$ имеет ровно n корней ζ_1, \dots, ζ_n . Если все корни различны, общее решение уравнения (5.13) состоит из функций

$$x[k] = c_1\zeta_1^k + \dots + c_n\zeta_n^k.$$

В матричной записи:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 & \dots & \zeta_n \\ \zeta_1^2 & \dots & \zeta_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^N & \dots & \zeta_n^N \end{bmatrix}}_W \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_c, \quad W \doteq \begin{bmatrix} \zeta_1 & \dots & \zeta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^N & \dots & \zeta_n^N \end{bmatrix}.$$

Матрица W содержит подматрицу Вандермонда $\begin{bmatrix} \zeta_1 & \dots & \zeta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^n & \dots & \zeta_n^n \end{bmatrix}$, определитель которой не равен нулю, поэтому столбцы матрицы W линейно независимы. Поскольку число этих столбцов n , они образуют *фундаментальную систему решений*, т. е. любое решение однородного уравнения (5.13) может быть представлено как линейная комбинация столбцов матрицы W : $x = Wc$.

Пусть теперь первый корень ζ_1 имеет кратность q , т. е. набор корней характеристического многочлена $\alpha(\zeta)$ имеет вид

$$\underbrace{\zeta_1, \dots, \zeta_1}_q, \zeta_{q+1}, \dots, \zeta_n.$$

Тогда общее решение однородного уравнения состоит из функций

$$\begin{aligned} x[k] = & (c_{1,0} + c_{1,1}k + \dots + c_{1,q-1}k^{q-1}) \zeta_1^k + \\ & + c_{q+1} \zeta_{q+1}^k + \dots + c_n \zeta_n^k. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Таким же образом находится общее решение в случае, когда имеется несколько кратных корней. Фундаментальную систему решений напишите самостоятельно в качестве упражнения.

Рассмотрим неоднородное уравнение (5.10). Чтобы найти частное решение $x_1[k]$, будем использовать *дискретный аналог* интеграла свертки (1.17), (4.17). Чтобы узнать, как выглядит свертка в дискретном случае, запишем уравнение (5.10) в канонической нормальной форме (см. (4.11)):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{v[k+1]} [k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{v[k]} [k] + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}}_B u[k], \quad (5.14)$$

$$x[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} [k], \quad k \in \overline{1, N}.$$

Определение 12. Решением системы (5.10) называем пару сеточных функций $x = \begin{bmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[N] \end{bmatrix}$, которые удовлетворяют уравнению (5.10). Решением системы (5.14) называем пару сеточных функций x , u , которые удовлетворяют уравнению (5.14) при некотором значении вектора начальных условий $v[1] \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 9. *Всякое решение системы (5.10) является решением системы (5.14), и наоборот, всякое решение системы (5.14) является решением системы (5.10).*

Доказательство. Достаточно повторить доказательство теоремы 6, придав символу \hat{s} смысл оператора сдвига вперед: $\hat{s}v[k] \doteq v[k+1]$. \square

Построим дискретную импульсную функцию для уравнения (5.14). Последовательно применяя уравнение (5.14) для $k = 1, 2, \dots$, получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} v[2] &= Av[1] + Bu[1], \\ v[3] &= A(Av[1] + Bu[1]) + Bu[2] = \\ &= A^2v[1] + ABu[1] + Bu[2], \\ &\dots \dots \dots \\ v[k] &= A^{k-1}v[1] + A^{k-2}Bu[1] + A^{k-3}Bu[2] + \dots + Bu[k-1]. \end{aligned}$$

Отсюда при $v[1] = 0$ следует

$$x[k] = CA^{k-2}Bu[1] + CA^{k-3}Bu[2] + \dots + CBu[k-1]. \quad (5.15)$$

Эта сумма и есть дискретная свертка входного сигнала $u = \begin{bmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{bmatrix}$ с дискретной импульсной функцией $w = \begin{bmatrix} w[1] \\ \vdots \\ w[k-1] \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{k-2}B \end{bmatrix}$. Применяя равенство (5.15) для каждого $k \in \overline{2, N}$, получим искомое частное решение $x_1 \doteq \begin{bmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}$ неоднородного уравнения (5.10).

Рассмотрим систему разностных уравнений в нормальной форме первого

порядка (5.9). Для однородного уравнения

$$v[k+1] = A_d v[k] \quad (5.16)$$

получаем $v[k] = A_d^{k-1} v[1]$, $v[1] \in \mathbb{R}^n$. Сравнивая со случаем непрерывного времени (раздел 4.1), видим, что роль матричной экспоненты играет степенная функция матрицы $A_d = e^{Ah}$ (5.7).

Получим решение уравнения (5.16) в виде $v[k] = c\zeta^k$, где $c \in \mathbb{C}^n$ — вектор и $\zeta \in \mathbb{C}$ — некоторое число. Подстановка в уравнение приводит к равенству $(\zeta I - A_d)c = 0$. Ненулевое решение $c \neq 0$ возможно только при условии $\det(\zeta I - A_d) = 0$. Это есть характеристическое уравнение разностной системы (5.16). Если матрица A_d имеет каноническую форму (5.14), многочлен $\det(\zeta I - A_d)$ совпадает с характеристическим многочленом $\alpha(\zeta)$ уравнения (5.10) (см. утверждение 14). Тогда общее решение уравнения (5.16) с учетом кратности корней характеристического многочлена $\alpha(\zeta) = \det(\zeta I - A_d)$ имеет вид

$$v[k] = (c_{1,0} + c_{1,1}k + \dots + c_{1,q-1}k^{q-1}) \zeta_1^k + c_{q+1} \zeta_{q+1}^k + \dots + c_n \zeta_n^k, \quad (5.17)$$

$$x[k] = C v[k]. \quad (5.18)$$

В отличие от решения (5.13) уравнения (5.11), здесь $c_i, c_{j,k}$ — не числа, а векторы.

Из формулы (5.17) следует

Утверждение 18. Решение $v[k]$ однородного уравнения $v[k+1] = A_d v[k]$ ограничено по норме $\|v[k]\| \leq c k^{n-1} |\zeta_n|^k$, где c — некоторая константа, а ζ_n — собственное число матрицы A_d с наибольшим модулем $|\zeta_n| = \max_{i=\overline{1,n}} |\zeta_i|$.

5.3 Устойчивость разностных уравнений

Для разностного уравнения

$$x[k+n] + \alpha_{n-1} x[k+n-1] + \dots + \alpha_0 x[k] = u[k], \quad k \geq 1, \quad (5.19)$$

устойчивость по входу определяется как и для случая непрерывного времени (сравните с определением 7):

Определение 13. 1. Решение $x[k]$ уравнения (5.19) при заданной ненулевой функции правой части $u[k]$ устойчиво, если оно ограничено: $|x[k]| \leq c_x < \infty$. 2. Уравнение (5.19) устойчиво, если для любой ненулевой ограниченной функции правой части $|u[k]| \leq c_u < \infty$ все его решения ограничены.

Сопоставляя формулы (5.13) и (1.4), получим взаимно-однозначное соответствие между корнями ζ, λ характеристических многочленов разностного и дифференциального уравнений: $\zeta = e^{\lambda h}$.

Соотношение ($|\zeta| < 1$) \Leftrightarrow ($\operatorname{Re} \lambda < 0$) приводит к дискретному аналогу определения 8.

Определение 14. Характеристический многочлен *разностного* уравнения $\alpha(\zeta) = \alpha_n \zeta^n + \alpha_{n-1} \zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0$ называется *устойчивым*, если все его корни по модулю меньше единицы: $\alpha(\zeta) = 0 \Rightarrow |\zeta| < 1$.

Определение 15. Матрица A_d разностного уравнения (5.16) называется устойчивой, если устойчив в смысле определения 14 характеристический многочлен $\alpha(\zeta) = \det(\zeta I - A_d)$.

Теорема 10. Разностное уравнение (5.19) устойчиво по входу тогда и только тогда, когда устойчив его характеристический многочлен.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

5.4 Дискретное уравнение Ляпунова

Для анализа устойчивости системы разностных уравнений первого порядка (5.16) применяется дискретный аналог теоремы 8.

Теорема 11. Пусть спектр $\{\zeta_1(A_d), \dots, \zeta_n(A_d)\}$ матрицы A_d не имеет взаимно-обратных точек: $\zeta_i(A_d)\zeta_j(A_d) \neq 1$. И пусть H — решение дискретного уравнения Ляпунова

$$A_d^\top H A_d - H = -I. \quad (5.20)$$

Тогда: 1) если решение H существует, то оно единственно;

2) решение симметрично $H^\top = H$;

3) устойчивость в смысле определения 15 матрицы A_d влечет существование решения $H > 0$, которое вычисляется как сумма сходящегося ряда

$$H = I + A_d^\top A_d + A_d^{2\top} A_d^2 + \dots = \sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l \geq I > 0; \quad (5.21)$$

4) обратно, если уравнение Ляпунова (5.20) имеет строго положительно определенное решение $H > 0$, то матрица A_d устойчива в смысле определения 15, ряд (5.21) сходится, и $H = \sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l \geq I$.

Доказательство. Доказательство единственности (1) не приводим. Равенство (2) $H^\top = H$ следует из того, что при транспонировании уравнение Ляпунова переходит само в себя с заменой H на H^\top , и из единственности решения.

Докажем (3). Пусть матрица A_d устойчива в смысле определения 15, т. е. для всех $i \in \overline{1, n}$ $|\zeta_i(A)| < 1$. Для произвольного решения уравнения $v[k+1] = A_d v[k]$ ввиду соотношения $v[l] = A_d^{l-1} v[1]$ верно равенство

$$v[1]^\top \left(\sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l \right) v[1] = \sum_{l \geq 1} v[l]^\top v[l]. \quad (5.22)$$

Из утверждения 18 следует, что каждое слагаемое в правой части ограничено сверху неравенством $v[l]^\top v[l] = \|v[l]\|^2 \leq c l^{2n-2} |\zeta_n|^{2l}$. Так как $|\zeta_n| < 1$, то ряд $\sum_{l \geq 1} v[l]^\top v[l]$ сходится, а тогда сходится и ряд $v[1]^\top \left(\sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l \right) v[1]$. Значит, конечна норма матрицы

$$\left\| \sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l \right\| = \sup_{v \neq 0} \frac{v^\top \left(\sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l \right) v}{v^\top v}.$$

То, что сумма ряда

$$\sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l = H \quad (5.23)$$

является решением уравнения Ляпунова, проверяется подстановкой.

Докажем (4). Пусть уравнение $A_d^\top H A_d - H = -I$ имеет решение $H > 0$.

Тогда для любого вектора v выполнено

$$0 < \lambda_{\min}(H)v^\top v \leq v^\top H v \leq \lambda_{\max}(H)v^\top v,$$

что равносильно

$$\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}v^\top v \leq \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}v^\top H v \leq v^\top v. \quad (5.24)$$

Пусть $v[k]$ — решение уравнения (5.16). Определим функцию

$$V[k] \doteq v[k]^\top H v[k] \geq 0.$$

В силу дискретного уравнения Ляпунова

$$V[k+1] - V[k] = v[k]^\top (A_d^\top H A_d - H) v[k] = -v[k]^\top v[k].$$

Тогда имеем

$$0 \leq V[k+1] = V[k] - v[k]^\top v[k] \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}\right) V[k]$$

(последнее неравенство получено с учетом (5.24)). Из неравенства

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}\right) V[k]$$

следует $\lambda_{\max}(H) \geq 1$, откуда получаем $0 \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}\right) < 1$. Тогда из $V[k+1] \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}\right) V[k]$ следует $\lim_{k \rightarrow \infty} V[k] = 0$. Ввиду $H > 0$ из сходимости $V[k]$ к нулю следует сходимость $v[k] \rightarrow 0$. Поскольку начальные условия $v[1]$ произвольны, все решения уравнения (5.16) сходятся к нулю, поэтому матрица A_d устойчива. \square

Для анализа устойчивости системы (5.16) ищется решение H дискретного уравнения Ляпунова. Если все собственные числа $\lambda(H)$ строго положительны (т. е. $H > 0$), то система устойчива. Программа для Scilab:

```
Ad=[0.8 0.1; 0.2 0.7] // матрица разностного уравн.;
I=eye(Ad) // единичная матрица;
H=lyap(Ad,-I,'d') // решение дискретн. уравн. Ляпунова;
```

спес(Н) // вычисление спектра;
 // если в спектре Н нет отрицательных значений,
 // разностное уравнение с матрицей Ad устойчиво

Упражнение 28. Найдите решение H_2 уравнения Ляпунова (5.20) для матрицы $A_d = 2I$. Что можно сказать о положительной определенности матрицы H_2 ? Покажите, что H_2 не представляется в виде ряда (5.21). Устойчива ли матрица $A_d = 2I$? Проверьте устойчивость без использования теоремы 11, путем анализа решений уравнения $v[k+1] = A_d v[k]$.

5.5 Количественная мера устойчивости дискретной системы

Определим количественный показатель устойчивости системы (5.16):

$$\varkappa_d(A_d) \doteq \sup_{v[1] \neq 0} \frac{\sum_{l \geq 1} v[l]^\top v[l]}{v[1]^\top v[1]}, \quad (5.25)$$

где $v[l]$ — решение системы (5.16) с начальными данными $v[1]$. Сумму в правой части (5.25) можно рассматривать как квадрат нормы сеточной функции $v[l]$. Чем меньше устойчивость, тем больше норма. Показатель \varkappa_d по смыслу аналогичен показателю \varkappa (4.24) устойчивости непрерывных систем. Если дискретная система получена из непрерывной дискретизацией $A_d = e^{Ah}$ с шагом $h \neq 1$, то следует использовать показатель¹

$$\varkappa_{d,h}(A_d) \doteq h \sup_{v[1] \neq 0} \frac{\sum_{l \geq 1} v[l]^\top v[l]}{v[1]^\top v[1]} = h \varkappa_d(A_d).$$

Основанием для такого определения является приближенное значение интеграла в формуле для \varkappa (4.24):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt &= \int_0^\infty v(0)^\top (e^{At})^\top e^{At} v(0) dt \simeq \\ &\simeq \sum_{l \geq 0} v(0)^\top (e^{Ahl})^\top e^{Ahl} v(0) h = h \sum_{l \geq 1} v[l]^\top v[l]. \end{aligned}$$

¹Использовать $h\varkappa_d$ вместо \varkappa_d предложил В. Г. Казаков.

В последнем равенстве учтено соответствие $v(0) \doteq v[1]$. Формула приближенного интегрирования будет тем более точной, чем меньше h . Тогда в пределе $h \rightarrow 0$ получим $h\kappa_d(A_d) \rightarrow \kappa(A)$.

Далее пусть $h = 1$. Покажем, что для устойчивой системы верно равенство $\kappa_d(A_d) = \|H\|$, где норма матрицы определена, как и ранее, соотношением $\|H\| \doteq \sup_{v \neq 0} \frac{\|Hv\|}{\|v\|}$. Из этого будет следовать, что норма решения H дискретного уравнения Ляпунова служит количественной мерой устойчивости.

Действительно, из соотношений $\sum_{l \geq 1} v[l]^\top v[l] = v[1]^\top (\sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l) v[1]$ (5.22) и $H = \sum_{l \geq 0} A_d^{l\top} A_d^l$ (5.23) для устойчивой системы следует

$$\kappa_d(A_d) = \sup_{v[1] \neq 0} \frac{v[1]^\top H v[1]}{v[1]^\top v[1]} \doteq \sup_{v \neq 0} \frac{v^\top H v}{v^\top v}.$$

Поскольку матрица H симметричная и $H > 0$, имеет место равенство (4.25):

$$\kappa_d(A_d) = \sup_{v \neq 0} \frac{v^\top H v}{v^\top v} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Hv\|}{\|v\|} = \|H\|.$$

Вычисление показателя $\kappa_d(A_d)$ в Scilab:

```
H=lyap(Ad,-eye(Ad),'d') //решение дискретного уравн. Ляпунова;
спес(H) // вычисление спектра решения;
// если в спектре нет отрицательных значений, то
карпад=norm(H,2)
// в противном случае
// разностное уравнение с матрицей Ad неустойчиво
```

5.6 Модальное управление

На примере дискретной системы с обратной связью введем понятие *модального управления*. Нестрого говоря, модальное управление означает настройку *расположения корней* характеристического уравнения системы с помощью дополнительных элементов в цепи обратной связи.

Модами динамической системы называются функции вида $ct^q e^{\lambda t}$, $ck^q \zeta^k$, описывающие однородное движение системы в случае непрерывного (t) или

дискретного времени $[k]$. Модальное управление можно понимать как *управление модами*: с помощью обратной связи задается желаемое расположение корней λ и ζ на комплексной плоскости. Рассмотрим пример.

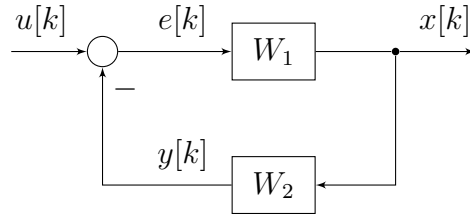


Рис. 5.2: Схема модального управления

Пусть звено W_1 описывается уравнением

$$x[k] = a_1 x[k-1] + \dots + a_n x[k-n] + e[k].$$

Устойчивость W_1 определяется расположением корней характеристического многочлена

$$a(\zeta) \doteq \zeta^n - a_1 \zeta^{n-1} - \dots - a_n$$

относительно единичной окружности с центром в нуле.

Определим звено W_2 уравнением

$$y[k] = b_1 x[k-1] + \dots + b_n x[k-n].$$

Задача модального управления — подобрать коэффициенты b_1, \dots, b_n звена W_2 обратной связи так, чтобы замкнутая система имела наперед заданные моды движения $\bar{\zeta}_1^k, \dots, \bar{\zeta}_n^k$ (например, устойчивые, лежащие внутри единичной окружности).

Решим эту простейшую задачу модального управления. Получим уравнение замкнутой системы подстановкой $e[k] = u[k] - y[k]$:

$$\begin{aligned} x[k] &= a_1 x[k-1] + \dots + a_n x[k-n] + u[k] - y[k] = \\ &= (a_1 - b_1) x[k-1] + \dots + (a_n - b_n) x[k-n] + u[k]. \end{aligned}$$

Моды движения замкнутой системы определяются расположением корней

характеристического многочлена

$$\bar{a}(\zeta) \doteq \zeta^n - (a_1 - b_1) \zeta^{n-1} - \dots - (a_n - b_n) a_n.$$

Искомые коэффициенты b_1, \dots, b_n вычисляются из уравнения

$$\bar{a}(\zeta) = (\zeta - \bar{\zeta}_1) \dots (\zeta - \bar{\zeta}_n).$$

Модальное управление для дискретной системы в нормальной форме первого порядка

Пусть звенья W_1, W_2 системы на рисунке 5.2 описываются уравнениями в нормальной форме первого порядка:

$$\begin{cases} v[k+1] = Av[k] + Be[k], & v \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^q \\ x[k] = Cv[k], \\ y[k] = Kx[k], & u, e, y \in \mathbb{R}^m, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{q \times n}, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Для замкнутой системы получаем уравнение

$$v[k+1] = Av[k] + Bu[k] - BKx[k] = (A - BKC)v[k] + Bu[k]$$

с характеристическим многочленом

$$\bar{a}(\zeta) = \det(\zeta I - A + BKC).$$

Задача модального управления может состоять в поиске матрицы K такой, чтобы многочлен $\bar{a}(\zeta)$ имел наперед заданное расположение корней. Существование решения этой задачи зависит от матриц A, B, C .

Контрольные вопросы и упражнения

1. Для однородных дискретных систем с указанными характеристическими многочленами опишите качественный характер поведения графиков

решений:

$$\text{а) } \alpha(\zeta) = (\zeta - 1,1)(\zeta - 0,9); \quad \text{б) } \alpha(\zeta) = \zeta^2 - 1,8\zeta + 1,1.$$

2. Найдите общее действительное решение уравнений:

$$\text{а) } x[k + 2] - 1,1x[k + 1] + 0,3x[k] = 0;$$

$$\text{б) } x[k + 2] - 1,1x[k + 1] + 0,3x[k] = 1.$$

3. Проверьте устойчивость дискретной системы

$$x[k + 2] - x[k + 1] + x[k] = u[k].$$

4. Приведите пример разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, находящегося на границе устойчивости.

5. Найдите общее действительное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1[k + 1] = x_1[k] + x_2[k], \\ x_2[k + 1] = \frac{1}{2}x_1[k] + x_2[k]. \end{cases}$$

6. Для объекта, описываемого разностным уравнением

$$x[k] = 1,8x[k - 1] - 1,1x[k - 2] + u[k],$$

постройте обратную связь указанием коэффициентов $k_{1,2}$

$$u[k] = -k_1x[k - 1] - k_2x[k - 2]$$

так, чтобы замкнутая система имела собственные движения:

(а) с двумя устойчивыми экспоненциальными модами;

(б) в виде колебаний с экспоненциально затухающей амплитудой.

7. Сравните степень устойчивости двух систем по величине \varkappa_d :

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x_1[k+1] = 0,5x_1[k] + 0,1x_2[k], \\ x_2[k+1] = 0,1x_1[k] + 0,5x_2[k]; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} x_1[k+1] = 0,4x_1[k] + 0,2x_2[k], \\ x_2[k+1] = 0,2x_1[k] + 0,4x_2[k]. \end{cases} \end{aligned}$$

8. Для системы из задачи 6 исследуйте зависимость показателя устойчивости \varkappa_d от величины коэффициентов $k_{1,2}$.

Глава 6

Вопросы алгебры линейных систем

В этой главе изучим основные понятия, связанные с дискретными системами в нормальной форме первого порядка

$$\begin{cases} v[k+1] = Av[k] + Bu[k], \\ x[k] = Cv[k], \end{cases} \quad k \in \overline{1, N}, \quad (6.1)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad C \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Отождествим систему с тройкой матриц (A, B, C) . Вектор $v[k] \in \mathbb{R}^n$ называется *состоянием* системы. Пространство \mathbb{R}^n играет роль *пространства состояний*. Значение вектора $v[k]$ в некоторый момент k_0 при заданной функции входа $u[k]$ полностью определяет поведение системы в последующие моменты времени $k \geq k_0$.

Определение. Состояние $v \in \mathbb{R}^n$ системы (A, B, C) называется *управляемым*, если существует управление $u = \begin{bmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[n] \end{bmatrix}$, переводящее систему из состояния $v[1] = v$ в нулевое состояние $v[n+1] = 0$. Система (A, B, C) называется *управляемой*, если управляемы все состояния $v \in \mathbb{R}^n$. Состояние $v \in \mathbb{R}^n$ системы (A, B, C) называется *достижимым*, если существует управление $u = \begin{bmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[n] \end{bmatrix}$, переводящее систему из нуля $v[1] = 0$ в состояние $v[n+1] = v$. Система (A, B, C) называется *достижимой*, если достижимы все состояния $v \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 19. Пусть линейно-независимы столбцы матрицы управляе-

мости S :

$$\text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} A^{n-1}B & A^{n-2}B & \dots & B \end{bmatrix}}_S = n. \quad (6.2)$$

Тогда система (A, B, C) управляема. Если $\det A \neq 0$, то условие (6.2) становится не только достаточным, но и необходимым для управляемости.

Доказательство. Из уравнения $v[k+1] = Av[k] + Bu[k]$ следует соотношение

$$\begin{aligned} v[n+1] &= A^n v[1] + A^{n-1}Bu[1] + A^{n-2}Bu[2] + \dots + Bu[n] = \\ &= A^n v[1] + Su. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Управляемость системы равносильна тому, что для любого состояния $v[1]$ существует управление u такое, что верно равенство $0 = A^n v[1] + Su$. Пусть выполнено (6.2), тогда матрица S обратима и $u = -S^{-1}A^n v[1]$. Достаточность доказана. Если $\det A \neq 0$, то произвольность $v[1]$ означает произвольность $A^n v[1]$, а для разрешимости уравнения $0 = A^n v[1] + Su$ при произвольных $A^n v[1]$ необходима линейная независимость столбцов матрицы S , т. е. $\text{rank } S = n$. \square

Упражнение 29. Докажите, что система (A, B, C) достижима тогда и только тогда, когда линейно-независимы строки матрицы S , в том числе и для особых матриц $\det A = 0$.

Определение. Состояние $v \in \mathbb{R}^n$ системы (A, B, C) называется *наблюдаемым*, если оно вычислимо по наблюдению выхода $x = \begin{bmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[n] \end{bmatrix}$ и входа

$u = \begin{bmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[n] \end{bmatrix}$ системы при движении из начального состояния $v[1] = v$. Система (A, B, C) называется *наблюдаемой*, если наблюдаемы все состояния $v \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 20. Система (A, B, C) наблюдаема тогда и только тогда, когда

линейно-независимы столбцы матрицы наблюдаемости H_0 :

$$\text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{H_0} = n.$$

Доказательство. Как и ранее в (6.3), можем написать

$$x[k] = Cv[k] = CA^{k-1}v[1] + CA^{k-2}Bu[1] + \dots + CBu[k-1], \quad k = \overline{1, n}.$$

Или в матричном виде

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[n] \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{H_0} v[1] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ CB & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ CA^{n-2}B & \dots & CB & 0 \end{bmatrix}}_{H_1} \underbrace{\begin{bmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[n] \end{bmatrix}}_u.$$

Это означает равенство $x - H_1u = H_0v[1]$. Из этого равенства вектор $v[1]$ однозначно вычисляется по вектору $x - H_1u$ тогда и только тогда, когда столбцы матрицы H_0 линейно независимы, т.е. $\text{rank } H_0 = n$. Утверждение доказано. \square

Упражнение 30. Докажите, что система с матрицами $(A, B, *_1)$ достижима тогда и только тогда, когда наблюдаема система $(A^\top, *_2, B^\top)$. И наоборот, система с матрицами $(A, *_3, C)$ наблюдаема тогда и только тогда, когда достижима система $(A^\top, C^\top, *_4)$. (Звездочки $*_{1 \div 4}$ обозначают произвольные матрицы подходящего размера.) Если $\det A \neq 0$, то вместо достижимости можно говорить об управляемости.

Факты, перечисленные в упражнении 30, позволяют говорить, что понятия управляемости и достижимости (наблюдаемости) *дуальны*.

Определим понятие *равносильности* двух систем W и W' , заданных

тройками матриц (A, B, C) и (A', B', C') :

$$W : \begin{cases} v[k+1] = Av[k] + Bu[k], \\ x[k] = Cv[k]; \end{cases}$$

$$W' : \begin{cases} v'[k+1] = A'v'[k] + B'u[k], \\ x'[k] = C'v'[k], \end{cases} \quad k \in \overline{1, N}.$$

Обратим внимание, что у обеих систем входной сигнал одинаков.

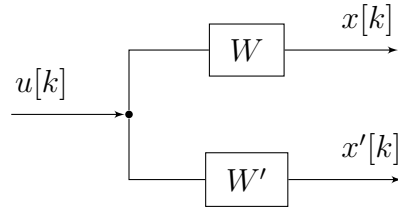


Рис. 6.1: К определению равносильных систем

Определение 16. Системы W и W' называются равносильными (*по входу-выходу*), если для любого входного сигнала $u = \begin{bmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[N] \end{bmatrix}$ и любых начальных условий $v[1]$ системы W существуют начальные условия $v'[1]$ системы W' такие, что выходы обеих систем совпадают: $x' = \begin{bmatrix} x'[1] \\ \vdots \\ x'[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} = x$ — и наоборот, для любых начальных условий $v'[1]$ системы W' существуют начальные условия $v[1]$ системы W такие, что $x = x'$.

Равносильность систем W и W' будем обозначать $W \sim W'$.

Пример 7. Рассмотрим две системы

$$W : \begin{cases} v[k+1] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} v[k] + \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \end{bmatrix} u[k], \\ x[k] = \begin{bmatrix} 0 & \varphi \end{bmatrix} v[k], \end{cases} \quad , v[k] \in \mathbb{R}^2;$$

$$W' : \begin{cases} v'[k+1] = \alpha v'[k] + \beta u[k], \\ x'[k] = \varphi v'[k], \end{cases} \quad , v'[k] \in \mathbb{R}^1, \quad k \in \overline{1, N}.$$

Обратим внимание, что у W и W' различны размерности пространств состояний: $n = 2$ и $n' = 1$. Тем не менее эти системы равносильны. Действительно, для $v[k] = \begin{bmatrix} v_1[k] \\ v_2[k] \end{bmatrix}$ следует взять $v'[k] = v_2[k]$. Тогда при $v'[0] = v_2[0]$

выходы систем тождественно совпадают $x'[k] = x[k]$ для любых значений входа $u[k]$.

Этот пример подводит к следующему определению.

Определение 17. Среди всех систем W' , равносильных данной системе W , выделяются системы с наименьшей размерностью пространства состояний $n' = n_{\min}(W)$. Такие системы называются *минимальными*.

Одной из целей данной главы является описать все минимальные системы, равносильные данной системе W , и указать способ построения множества всех минимальных систем.

На практике размерности n пространств состояний могут достигать десятков тысяч. Примером являются комбинации электрических схем из простых элементов (сопротивлений, конденсаторов, индуктивностей, линейных усилителей). Такие устройства при малых токах и напряжениях описываются линейными дифференциальными уравнениями. Размерность пространства состояний зависит от количества узлов схемы. Нахождение минимальной равносильной системы позволяет многократно уменьшить время настройки, если рассматривается, например, блок в каскадном регуляторе.

Определение. *Преобразованием подобия* системы (A, B, C) называется замена матриц

$$\begin{aligned} (A, B, C) &\rightarrow (A', B', C'), \\ A' &= TAT^{-1}, & B' &= TB, \\ C' &= CT^{-1}, & \det T &\neq 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Системы, связанные преобразованием подобия, называются *подобными*.

Утверждение 21. Подобные системы равносильны.

Доказательство. Достаточно заметить, что преобразование подобия соответствует невырожденной замене переменных $v' = Tv \in \mathbb{R}^n$ в пространстве состояний. Проверьте самостоятельно, что подстановка $v = T^{-1}v'$ изменяет матрицы системы и начальное состояние, но не изменяет выход системы. \square

Утверждение 22. Преобразование подобия не изменяет свойств достижимости (управляемости) и наблюдаемости и не изменяет характеристического многочлена системы.

Доказательство. Следует из утверждений 19 и 20 (проверьте). \square

Следующая *теорема о декомпозиции* пространства состояний занимает центральное место в теории линейных систем. Приведем ее без доказательства.

Теорема 12. (Р. Калман, 1961). Любая система $(A, B, C) \doteq W$ преобразованием подобия может быть приведена к виду

$$(A, B, C) \sim (A_{\#}, B_{\#}, C_{\#}),$$

$$A_{\#} \doteq \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ \hline 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{array} \right], \quad B_{\#} \doteq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{\#} \doteq \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{array} \right].$$

При этом матрицы $(A_{\#}, B_{\#}, C_{\#})$ обладают следующими свойствами.

1. Подсистема $(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [0 \ C_2]) \doteq W_{\text{упр}}$ управляема.
2. Подсистема $(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, [C_2 \ C_4]) \doteq W_{\text{набл}}$ наблюдаема.
3. Система W равносильна подсистеме $W_{\text{набл}}$.
4. Подсистема $W_{\text{набл}}$ минимальна, и все минимальные равносильные W системы подобны $W_{\text{набл}}$.

Следствие. Для нахождения минимальной равносильной W системы необходимо и достаточно найти подсистему $W_{\text{набл}}$.

Вычисление наблюдаемых и управляемых подсистем в Scilab:

```
A=[1,1;0,2] // матрицы системы 1
B=[1;0] //
C=[1,1] //
sl1=syslin('c',A,B,C) // создание записи системы 1
slc=contrss(sl1) // вычисление управл. подсистемы для 1
```

```

slc.A
slc.B
slc.C // матрицы (A,B,C) управл. подсистемы
//
A=A'; // матрицы системы 2
B=[1;1] //
C=[1,0] //
sl2=syslin('c',A,B,C) // создание записи системы 2
slo=obsvss(sl2) // вычисление наблюда. подсистемы для 2
slo.A
slo.B
slo.C // матрицы (A,B,C) набл. подсистемы

```

Приведение наблюдаемой системы в каноническую форму

Установим связь нормальной формы (A, B, C) (6.1) с канонической формой (A_F, B_F, C_F) (5.14) и тем самым с разностным уравнением (5.10) без переменных состояния.

Теорема 13. *Любая наблюдаемая система (A, B, C) подобна некоторой системе в канонической форме (5.14):*

$$\begin{aligned}
 TAT^{-1} &= A_F \doteq \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, & TB &= B_F \doteq \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \\
 CT^{-1} &= C_F \doteq \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Здесь α_i — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A

$$\det(\zeta I - A) = \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0.$$

Обратно, всякая система вида (6.5) наблюдаема.

Доказательство. 1. Построим матрицу T . Обозначим $T \doteq \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$, где t_i — строки. Из равенства $C_F = [0 \dots 01] = CT^{-1}$ следует $[0 \dots 01] \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = C$, т. е.

$$t_n = C. \quad (6.6)$$

Из равенства $A_F T = T A$ имеем

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} A.$$

Начиная с нижней строки, получаем цепочку равенств

$$t_{n-1} - \alpha_{n-1} t_n = t_n A \quad \Rightarrow \quad t_{n-1} = CA + \alpha_{n-1} C, \quad (6.7)$$

$$t_{n-2} - \alpha_{n-2} t_n = t_{n-1} A \quad \Rightarrow \quad t_{n-2} = t_{n-1} A + \alpha_{n-2} C, \quad (6.8)$$

... ..

$$t_1 - \alpha_1 t_n = t_2 A \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2 A + \alpha_1 C, \quad (6.9)$$

$$-\alpha_0 t_n = t_1 A. \quad (6.10)$$

Для вычисления всех строк t_i нужно до вычисления матрицы A_F знать коэффициенты α_i . В главе 4 (утверждение 14) было показано, что α_i являются коэффициентами характеристического многочлена матрицы A_F , а значит, и характеристического многочлена матрицы A ввиду равенств

$$\begin{aligned} \det(\zeta I - A_F) &= \det(\zeta I - T^{-1} A T) = \det T^{-1} \det(\zeta I - A) \det T = \\ &= \det(\zeta I - A). \end{aligned}$$

2. Нужно убедиться, что матрица T неособенная. Из уравнений (6.6)–(6.9) получаем систему

$$\begin{cases} t_n &= C, \\ t_{n-1} &= CA + \alpha_{n-1}C, \\ \dots &\dots \\ t_1 &= CA^{n-1} + \alpha_{n-1}CA^{n-2} + \dots + \alpha_1C. \end{cases}$$

Запишем ее в матричном виде:

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\ & 1 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} CA^{n-1} \\ CA^{n-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{bmatrix}}_{H_0} \doteq PH_0.$$

Ввиду наблюдаемости системы (A, B, C) матрица H_0 неособенная. Также неособенна матрица P , поскольку ее определитель равен единице, следовательно, неособенна матрица $T = PH_0$.

3. Наблюдаемость системы (A_F, B_F, C_F) следует из того, что ее матрица наблюдаемости имеет вид

$$H_0 = \begin{bmatrix} C_F \\ C_F A_F \\ \vdots \\ C_F A_F^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & * \end{bmatrix}$$

(с нулями выше поперечной диагонали), то есть неособенная. Теорема доказана. \square

Контрольные вопросы и упражнения

1. Укажите значение параметров α, β , при которых управляема система

$$\begin{cases} v_1[k+1] = v_2[k] + \alpha u_1[k], \\ v_2[k+1] = v_1[k] + \beta u_2[k]. \\ x[k] = v_1[k]. \end{cases}$$

2. Укажите значение параметров α, β , при которых наблюдаема система

$$\begin{cases} v_1[k+1] = u[k], \\ v_2[k+1] = v_1[k], \\ x[k] = \alpha v_1[k] + \beta v_2[k]. \end{cases}$$

3. Используя предыдущее задание, приведите пример ненаблюдаемой системы и укажите равносильную ей минимальную систему.

4. Запишите нижеследующую систему в канонической нормальной форме:

$$\begin{cases} v_1[k+1] = v_1[k] + 2v_2[k] + u[k], \\ v_2[k+1] = 3v_1[k] + 4v_2[k], \\ x[k] = v_2[k]. \end{cases}$$

5. Для системы из предыдущего задания напишите равносильное разностное уравнение вида (5.10), исключив переменные состояния $v_{1,2}[k]$.

6. Проверьте систему из предыдущего задания на устойчивость.

Глава 7

Нелинейные системы

7.1 Фазовая плоскость

Рассмотрим систему $x(\cdot) = \hat{W}[u(\cdot)]$, описываемую нелинейным уравнением $x^{(1)}(t) = F(x(t), u(t))$, $t \geq 0$. Здесь $x(t)$ уже не вещественнозначная функция, а вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$, подобный вектору состояния $v(t)$ из 4-й главы. При нулевом входном воздействии $u(t) \equiv 0$ собственное движение системы будет описываться уравнением

$$x^{(1)}(t) = F(x(t), 0) \doteq f(x(t)). \quad (7.1)$$

Параметрические кривые $t \mapsto x(t)$ в пространстве \mathbb{R}^n , построенные по уравнению (7.1), называются *фазовыми траекториями*, а всё пространство \mathbb{R}^n — *фазовым пространством*. Заметим, что фазовые траектории не могут пересекаться под углом, отличным от нуля (если угол пересечения равен нулю, то говорят, что траектории *слипаются*). Пересечение под ненулевым углом означало бы, что в точке пересечения вектор скорости $x^{(1)}$ имеет два разных значения, что невозможно ввиду равенства $x^{(1)} = f(x)$.

Точки $x \in \mathbb{R}^n$, определяемые условием $f(x) = 0$, называются *точками равновесия*, или точками покоя. Из уравнения $x^{(1)}(t) = f(x)$ видим, что вектор скорости $x^{(1)}(t)$ вдоль фазовой кривой в точках равновесия обращается в ноль.

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — точка равновесия, $f(a) = 0$. Заменяем функцию $f(x)$ на функцию $g(x) = f(x + a)$. У системы $x^{(1)} = g(x)$ точка $x = 0$ является точкой равновесия. Картина фазовых траекторий (*фазовый портрет*) для си-

стемы $x^{(1)} = g(x)$ получается из фазового портрета для системы $x^{(1)} = f(x)$ параллельным переносом на вектор $-a$. Следовательно, при исследовании точки равновесия всегда можно считать, что она расположена в нуле.

Важным частным случаем фазового пространства является *фазовая плоскость*. Так называется фазовое пространство с $n = 2$ и специальными координатами $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \end{bmatrix}$.

Свойства траекторий на фазовой плоскости:

1) при увеличении параметра t точка на фазовой траектории движется в верхней полуплоскости ($x_2 > 0$) слева направо, а в нижней полуплоскости ($x_2 < 0$) справа налево;

2) пересечение с осью абсцисс ($x_2 = 0$) всегда происходит под прямым углом.

Упражнение 31. Докажите свойства фазовых траекторий.

7.2 Устойчивость в окрестности точки равновесия

Определение 18. Положение равновесия $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ системы $x^{(1)} = f(x)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из условия $\|x(0)\| < \delta$ следует $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t > 0$. Другими словами, всегда можно указать такую окрестность точки равновесия, что все фазовые траектории, начинающиеся в этой окрестности, удаляются от точки равновесия не более заданной величины.

Заметим, что устойчивость по Ляпунову не предполагает возвращения с ростом времени фазовых траекторий в точку равновесия.

Определение 19. Положение равновесия $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ системы $x^{(1)} = f(x)$ называется *асимптотически устойчивым (по Ляпунову)*, если 1) оно устойчиво по Ляпунову и 2) существует $\delta > 0$ такое, что из условия $\|x(0)\| < \delta$ следует $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Другими словами, существует такая окрестность точки равновесия, что все траектории, начинающиеся из этой окрестности, с течением времени сходятся к точке равновесия.

Как нетрудно заметить, из асимптотической устойчивости следует устойчивость по Ляпунову, но не наоборот.

Следующая теорема описывает условия, при которых возможно свести исследование устойчивости точки равновесия нелинейной системы $x^{(1)} = f(x)$ к исследованию устойчивости *линейного приближения* $x^{(1)} = Ax$, $A \doteq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$.

Теорема 14. (А. М. Ляпунов, 1892). Пусть $f(0) = 0$ и функция $f(x)$ допускает разложение в ряд Тейлора в нулевой точке: $f(x) = Ax + f_1(x)$, где $f_1(x) = o(\|x\|)$ — остаточный член, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f_1(x)\|}{\|x\|} = 0$. Верны следующие утверждения.

1. Если матрица A гурвицева (устойчива) (т. е. из равенства $\det(\lambda I - A) = 0$ следует $\operatorname{Re} \lambda < 0$), то положение равновесия $x = 0$ линейной системы $x^{(1)} = Ax$ асимптотически устойчиво и положение равновесия $x = 0$ нелинейной системы $x^{(1)} = f(x)$ также асимптотически устойчиво.

2. Если матрица A неустойчива (т. е. характеристический многочлен $\det(\lambda I - A)$ имеет корень в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$), то линейное приближение неустойчиво по Ляпунову (значит, и асимптотически неустойчиво) и положение равновесия $x = 0$ нелинейной системы $x^{(1)} = f(x)$ также неустойчиво по Ляпунову.

3. Если матрица A «расположена» на границе устойчивости (т. е. характеристический многочлен $\det(\lambda I - A)$ имеет корни в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ и хотя бы один корень на мнимой оси $\operatorname{Re} \lambda = 0$), то об устойчивости положения равновесия $x = 0$ нелинейной системы $x^{(1)} = f(x)$ ничего сказать нельзя.

Доказательство этой теоремы мы не приводим. По поводу ее третьего утверждения можно заметить, что в случае чисто мнимого корня $\det(\lambda I - A)$ устойчивость точки равновесия нелинейной системы целиком определяется остаточным членом f_1 . Слагаемое f_1 можно рассматривать как малое возмущение, которое «смещает» корень вправо или влево с мнимой оси — границы устойчивости.

<дополнительный материал>

Пример 8. Исследуем положения равновесия *математического маятника* (рис. 7.1).

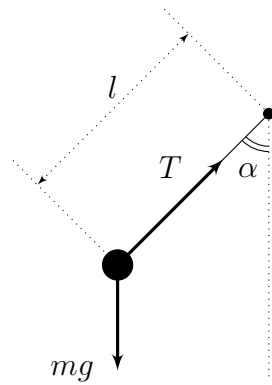


Рис. 7.1: Математический маятник

Уравнение вращательного движения маятника: $I\alpha^{(2)} = M_\beta + M_{mg}$, где $\alpha^{(2)}$ — вторая производная по времени угла $\alpha = \alpha(t)$ отклонения маятника, $I = ml^2$ — момент инерции, $M_\beta \doteq -\beta\alpha^{(1)}l$ — момент силы вязкого трения, $M_{mg} \doteq -mgl \sin \alpha$ — поворачивающий момент силы тяжести mg . После подстановки и деления на $I \neq 0$ уравнение движения примет вид

$$\alpha^{(2)} = -\frac{\beta}{ml}\alpha^{(1)} - \frac{g}{l}\sin \alpha.$$

Выберем координаты на фазовой плоскости: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \alpha^{(1)}(t) \end{bmatrix}$. Уравнение движения записывается в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_2, \\ x_2^{(1)} = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\beta}{ml}x_2. \end{cases}$$

Функция в правой части

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\beta}{ml}x_2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим точки равновесия $f(x) = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\beta}{ml}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Точка равновесия $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ соответствует нижнему положению маятника, $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ —

верхнему положению. Вычислим матрицу A линейного приближения:

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{\beta}{ml} \end{array} \right].$$

В точках равновесия $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ матрица A принимает значения

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \mp \frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml} \end{array} \right].$$

Исследуем устойчивость. Характеристический многочлен

$$\det(\lambda I - A) = \det \left[\begin{array}{c|c} \lambda & -1 \\ \pm \frac{g}{l} & \lambda + \frac{\beta}{ml} \end{array} \right] = \lambda \left(\lambda + \frac{\beta}{ml} \right) \pm \frac{g}{l}.$$

Пары корней в нижней $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и верхней $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ точках равновесия отличаются знаком слагаемого $\frac{g}{l}$ соответственно $-$ и $+$:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2ml} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2ml}\right)^2 \mp \frac{g}{l}}.$$

При отсутствии трения ($\beta = 0$) верхнему положению равновесия соответствует пара корней $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$, значит, система неустойчива. В нижнем положении равновесия имеем пару корней на границе устойчивости $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$, линейное приближение устойчиво по Ляпунову, движение линейной системы описывается гармоническими колебаниями постоянной амплитуды. Нелинейная система тоже устойчива, хотя это и не следует из теоремы А. М. Ляпунова.

Упражнение 32. Исследуйте устойчивость математического маятника в случае с трением $\beta > 0$.

</дополнительный материал>

7.3 Функции Ляпунова

Метод функций Ляпунова является основным методом исследования устойчивости нелинейных систем. Если для системы удастся найти *функцию Ляпунова*, то система устойчива. Существование такой функции является достаточным для устойчивости. Поясним построение функции Ляпунова на примере.

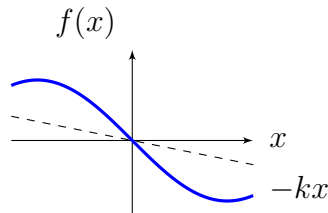


Рис. 7.2: Пример к построению функции Ляпунова

Утверждение. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ и в замкнутом интервале $x \in [-c, c] \subset \mathbb{R}$ выполнено $xf(x) < 0$, т. е. график функции $f(x)$ расположен во втором и четвертом квадрантах, см. рис. 7.2. Тогда система $x^{(1)} = f(x)$ асимптотически устойчива в окрестности $(-c, c)$ точки равновесия $x = 0$.

Доказательство. Определим *функцию Ляпунова* $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. Она обладает следующими свойствами в окрестности $x \in (-c, c)$: 1) $V(0) = 0$; 2) $V(x \neq 0) > 0$; 3) $\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$. Последнее свойство следует из определения:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = xf(x) < 0.$$

Убедимся, что функция $V(x(t))$ с ростом времени монотонно убывает. В замкнутом интервале $x \in [-c, c]$ существует положительная константа $k > 0$ такая, что $|f(x)| > k|x|$ (см. рис. 7.2). Тогда $-|f(x)| < -k|x|$,

$$\frac{d}{dt}V = xf(x) = -|x| \cdot |f(x)| < -kx^2 = -2kV.$$

Учитывая, что $V(t) > 0$, приходим к неравенству $\frac{dV}{V} < -2k dt$, из которого после интегрирования получаем $\ln \frac{V(t)}{V(0)} < -2kt$ и $V(t) < V(0)e^{-2kt}$. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ $V(t) \rightarrow 0$ и $x(t) \rightarrow 0$. \square

Теорема 15. (А. М. Ляпунов, 1897). Пусть $x^{(1)} = f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$ и

в некоторой окрестности нуля $B \ni 0$ существует функция $V(x) \in \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

$$1) \frac{d}{dt}V \leq 0, \text{ где}$$

$$\frac{d}{dt}V \doteq \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n;$$

$$2) V(0) = 0 \text{ и } V(x \neq 0) > 0;$$

$$4) V(x) \text{ и } \frac{d}{dt}V(x) \text{ непрерывны по } x.$$

Тогда: 1) если в окрестности B выполнено строгое неравенство $\frac{d}{dt}V < 0$, то нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво; 2) если в окрестности B выполнено нестрогое неравенство $\frac{d}{dt}V \leq 0$ и при этом в любой под-окрестности нуля $B' \subset B$, $B' \ni 0$ есть точка $x \neq 0$ такая, что $\frac{d}{dt}V(x) = 0$, то система устойчива по Ляпунову, но не асимптотически.

7.4 Типы движений в окрестности точки равновесия

Как и ранее, пусть $x^{(1)} = f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки равновесия: $f(x) = Ax + o(\|x\|)$. В окрестности нуля правая часть приближенно описывается линейной функцией Ax . Рассмотрим основные типы фазовых портретов линейного приближения $x^{(1)} = Ax$. Ввиду известного общего решения (4.10) моды $t^k e^{\lambda t}$ движения компонент вектора $x(t)$ определяются расположением корней λ характеристического многочлена $a(\lambda) \doteq \det(\lambda I - A)$ с действительными коэффициентами. Многочлен $a(\lambda)$ всегда допускает разложение (1.5) на сомножители:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = \\ &= (\lambda^2 + p_1\lambda + p_0) \dots (\lambda^2 + q_1\lambda + q_0) \dots (\lambda + r_0). \end{aligned}$$

Как следствие, для исследования типов движения в окрестности точки равновесия достаточно рассмотреть характеристический многочлен (и, соответ-

ственно, систему) второго порядка:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \end{bmatrix}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow &y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Построим фазовые портреты, соответствующие различным некрратным значениям корней характеристического многочлена

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} = \begin{cases} \alpha \pm i\beta, & \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 < 0, \\ \alpha_{1,2}, & \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 \geq 0. \end{cases}$$

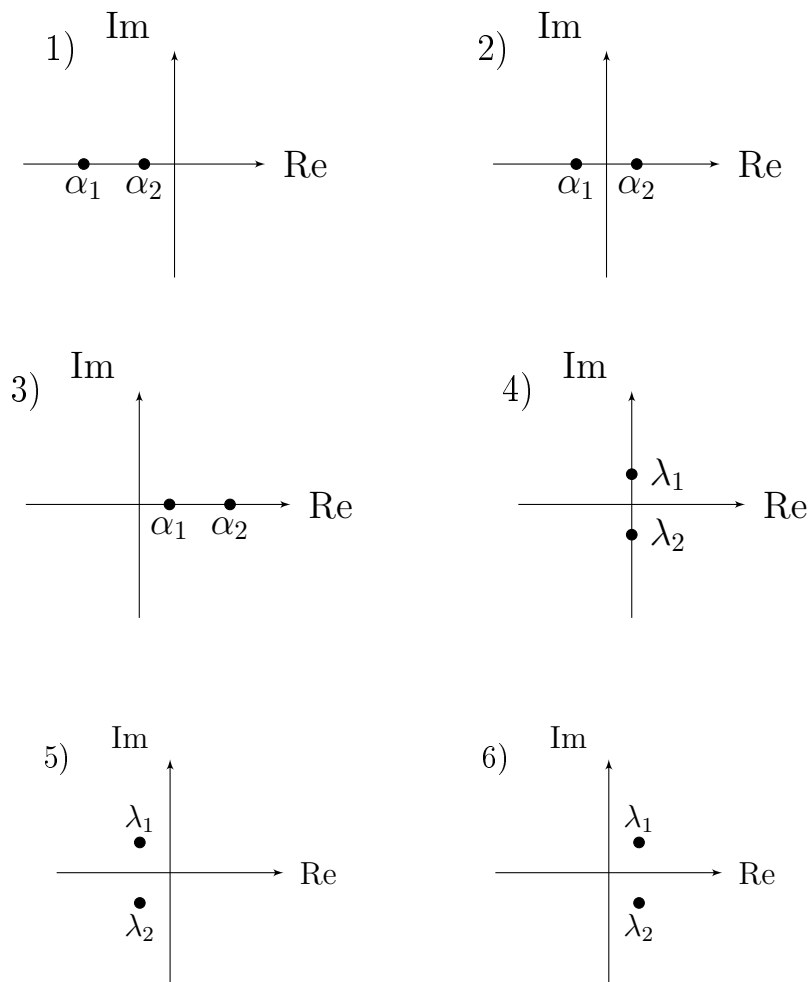


Рис. 7.3: Расположение некрратных корней многочлена второго порядка для шести типов движений в окрестности точки равновесия

1. Тип «устойчивый узел». Этот фазовый портрет появляется, когда характеристический многочлен имеет два отрицательных действительных корня

$\lambda_{1,2} = \alpha_{1,2} < 0$ (рис. 7.3 (1)). Пусть $|\alpha_1| > |\alpha_2|$. Решение уравнения (7.2) как функция времени имеет вид

$$y(t) = c_1 e^{-|\alpha_1|t} + c_2 e^{-|\alpha_2|t} \rightarrow c_2 e^{-|\alpha_2|t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

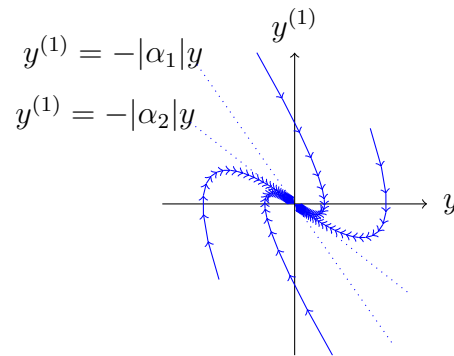


Рис. 7.4: «Устойчивый узел»

Построение фазового портрета в Scilab:

```
T=7; // временной интервал
a0=1; a1=3; // коэффициенты характ. многочлена
A=[0 1; -a0 -a1]; // матрица системы в форме 1-го порядка
s=%s; roots(determ(eye(A)*s-A)) // вычисление корней
step=0.2; // шаг по времени
F=expm(A*step); // матричная экспонента
a=gca(); a.x_location = "origin";
a.y_location = "origin"; // параметры графиков
// Подпрограмма построения траектории из нач. точки w:
function [W]=ris(w)
W=w; for k=1:(T/step); k=k+1; w=F*w; W=[W,w]; end
plot2d4(W(1,:),W(2,:),2) // рисунок траектории
endfunction
//Построение фазовых траекторий :
ris([1;1]) // завершение строки «;» отключает печать
ris([-1;-1])
ris([-0.5;2])
ris([0.5;-2])
```

2. Тип «седло». Характеристический многочлен имеет два действительных корня, отрицательный и положительный: $\lambda_{1,2} = \alpha_{1,2}$, $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ (рис. 7.3 (2)). Решение уравнения (7.2) как функция времени имеет вид

$$y(t) = c_1 e^{-|\alpha_1|t} + c_2 e^{|\alpha_2|t} \rightarrow c_2 e^{|\alpha_2|t} \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

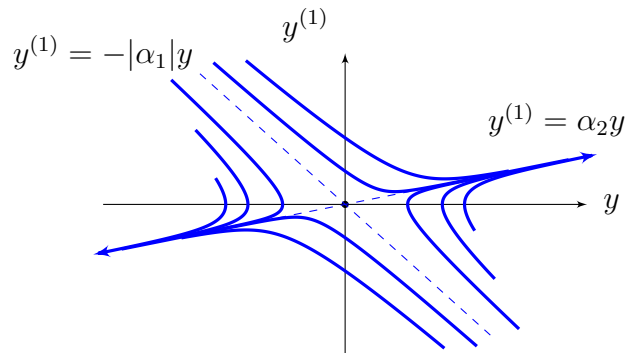


Рис. 7.5: «Седло»

Упражнение 33. Постройте фазовый портрет точки «седло» в Scilab.

3. Тип «неустойчивый узел». Характеристический многочлен имеет два положительных действительных корня: $\lambda_{1,2} = \alpha_{1,2}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ (рис. 7.3 (3)). Решение уравнения (7.2) как функция времени:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} \rightarrow c_2 e^{\alpha_2 t} \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

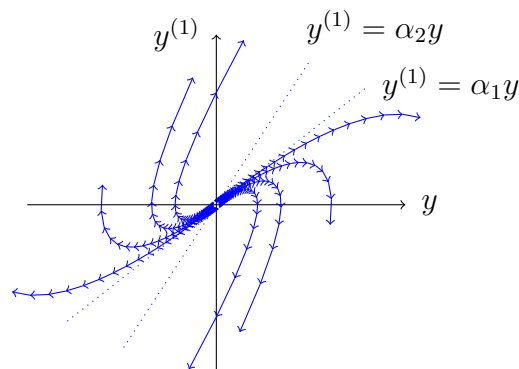


Рис. 7.6: «Неустойчивый узел»

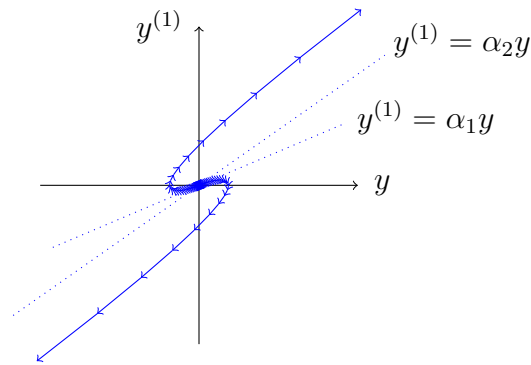


Рис. 7.7: «Неустойчивый узел»

4. Тип «центр». Характеристический многочлен имеет два сопряженных чисто мнимых комплексных корня с нулевой реальной частью: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ (рис. 7.3 (4)). Решение уравнения (7.2) как функция времени имеет вид

$$y(t) = c_1 \cos(\beta t + c_2).$$

5. Тип «устойчивый фокус». Характеристический многочлен имеет два сопряженных комплексных корня с отрицательной реальной частью: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$ (рис. 7.3 (5)). Решение уравнения (7.2) как функция времени:

$$y(t) = c_1 e^{-|\alpha|t} \cos(\beta t + c_2) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

6. Тип «неустойчивый фокус». Характеристический многочлен имеет два сопряженных комплексных корня с положительной реальной частью: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$ (рис. 7.3 (6)). Решение уравнения (7.2) как функция времени:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t + c_2) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

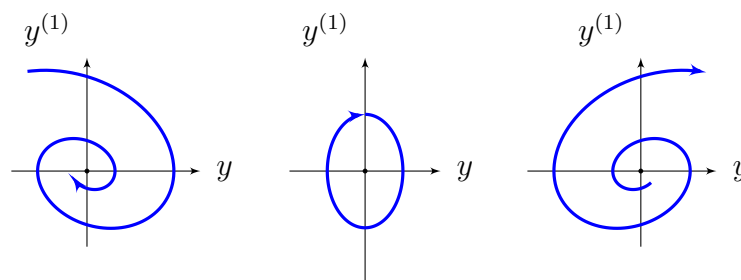


Рис. 7.8: «Устойчивый фокус», «центр» и «неустойчивый фокус»

Упражнение 34. Охарактеризуйте устойчивость по Ляпунову движений типов 1–6.

7.5 Автоколебания. Метод гармонического баланса. Уравнение Гольдфарба.

Понятие автоколебания было введено А. А. Андроновым в 1928 г., оно играет важную роль в теории нелинейных систем.

Рассмотрим периодическое движение в фазовом пространстве по замкнутой траектории S без самопересечений. Такие траектории называются орбитами. Определим понятие *орбитальной устойчивости*. Пусть «трубка» $S_\delta \supset S$ образована точками, удаленными от орбиты S на расстояние $\leq \delta$. Орбита S называется *устойчивой*, если для любого наперед заданного ε можно указать $\delta(\varepsilon)$ такое, что все траектории с началом внутри S_δ не выходят из S_ε . Орбита S называется *асимптотически устойчивой*, если она устойчива и все траектории с началом в $S_\delta \supset S$ с ростом времени сходятся к орбите S :

$$x(0) \in S_\delta \Rightarrow \rho(x(t), S) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Здесь $\rho(x(t), S)$ — расстояние от точки $x(t)$ до орбиты S .

Определение. Движения в малой окрестности S_ε асимптотически устойчивой орбиты S называются *автоколебаниями*.

Автоколебания возможны только в нелинейных системах. Действительно, орбитальные движения в линейных системах всегда имеют тип «центр» (см. раздел 7.4). Но орбиты типа «центр», будучи устойчивыми по Ляпунову, не являются асимптотически устойчивыми, поэтому они не являются автоколебаниями.

Рассмотрим пример системы с автоколебаниями.

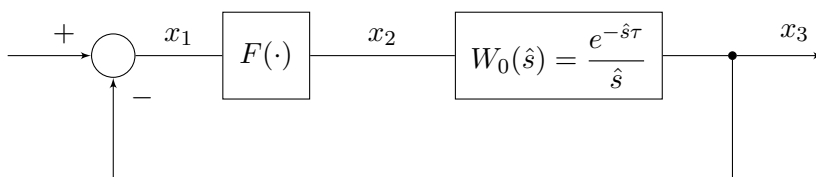


Рис. 7.9: Система с нелинейным звеном

Определим *релейное звено* $x_2 = F(x_1)$ (рис. 7.10):

$$F(x) = c \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} c, & x \geq 0, \\ -c, & x < 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

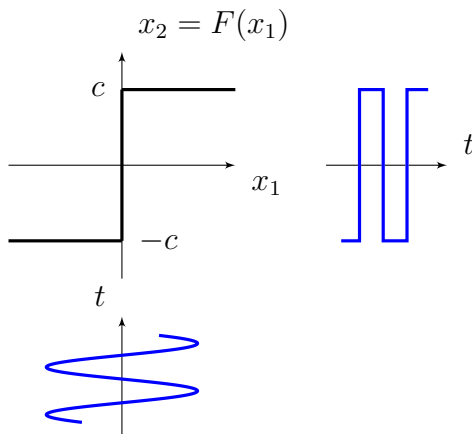


Рис. 7.10: Релейное звено

Пусть \hat{s} обозначает оператор дифференцирования. Замкнутый контур на рис. 7.9 описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1(t) &= -x_3(t), \\ x_2(t) &= F(x_1(t)), \\ x_3(t) &= W_0(\hat{s})x_2(t). \end{cases} \quad (7.4)$$

Допустим, что существует приближенное линейное представление

$$F(x_1(t)) \simeq K(\hat{s})x_1(t). \quad (7.5)$$

Тогда из системы (7.4) следует уравнение

$$W_0(\hat{s})K(\hat{s})x_3(t) \simeq -x_3(t). \quad (7.6)$$

Его следует понимать как условие на функцию $x_3(t)$, описывающую выход замкнутой системы.

Для вычисления приближения (7.5) и решения уравнения (7.6) используется метод *гармонической линеаризации*, разработанный Н. М. Крыловым и

Н. Н. Боголюбовым в 1934 г. В отличие от обычной линеаризации, основанной на разложении $F(x) = F(0) + Ax + \dots$ в ряд Тейлора по степеням x , при гармонической линеаризации используется разложение $F(x)$ в ряд Фурье при периодическом изменении аргумента $x = a \sin \omega t$:

$$F(a \sin \omega t) = a_0 + (a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t) + (a_2 \sin 2\omega t + b_2 \cos 2\omega t) + \dots$$

При разложении в ряд Тейлора предполагается малость отклонения функции $F(x) - F(0)$ от линейного члена Ax . При гармонической линеаризации предполагается малость отклонения $F(x) - a_0$ от первой гармоники $a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$. Условием гармонической линеаризации (7.8) является, таким образом, относительная малость амплитуды старших гармоник:

$$|a_k| \ll |a_1|, \quad |b_k| \ll |b_1|, \quad k \geq 2. \quad (7.7)$$

Это условие называют «условием фильтра» на функцию $F(\cdot)$.

Ограничившись первыми членами разложения в ряд Фурье, получим приближенное соотношение вида $F(x) = a_0 + K(\hat{s})x$:

$$F(a \sin \omega t) \simeq a_0 + \underbrace{a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t}_{K(\hat{s})a \sin \omega t}. \quad (7.8)$$

Правую часть можно выразить через линейный оператор: $K(\hat{s})a \sin \omega t = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$,

$$K(\hat{s}) = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{a\omega} \hat{s}. \quad (7.9)$$

При $a_0 = 0$ получаем линейное приближение (7.5) $F(a \sin \omega t) \simeq K(\hat{s})a \sin \omega t$.

Уравнение (7.6) $W_0(\hat{s})K(\hat{s})x_3(t) \simeq -x_3(t)$, полученное в предположении $x = a \sin \omega t$ при $a_0 = 0$, называют *уравнением гармонического баланса*. При подстановке в него оператора $K(\hat{s})$ можно вычислить функцию $x_3(t)$, описывающую автоколебания в нелинейной системе.

Применение преобразования Лапласа к уравнению (7.6) для гармонических функций $x_3(t)$ ($\hat{s} = i\omega$) приводит к *уравнению Гольдфарба*:

$$W_0(i\omega)K(i\omega) = -1. \quad (7.10)$$

Из этого уравнения вычисляются частота ω и амплитуда a автоколебаний.

В качестве примера применим метод гармонической линеаризации для расчета автоколебаний в системе (7.4).

Вычислим линейный оператор $K(\hat{s})$ для звена (7.3). Обозначим $\varphi \doteq \omega t$. Тогда коэффициенты a_0, a_1, b_1 ряда Фурье в (7.8) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) d\varphi = 0, \\ a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2c}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{4c}{\pi}, \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{2c}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Из уравнения $K(\hat{s}) = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{a\omega} \hat{s}$ (7.9) следует

$$K(\hat{s}) = \frac{4c}{a\pi}.$$

Уравнение Гольдфарба $W_0(i\omega)K(i\omega) = -1$ (7.10) позволяет найти параметры a, ω :

$$W_0(i\omega)K(i\omega) = \left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{i\omega} \frac{4c}{a\pi} \right) = -1.$$

Из этого уравнения следует: 1) равенство $\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau = -i\omega \frac{a\pi}{4c}$; 2) система уравнений

$$\begin{cases} \cos \omega\tau = 0 & \Rightarrow \omega\tau = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \geq 0, \\ \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k = -\omega \frac{a\pi}{4c} & \Rightarrow (-1)^k = \frac{1}{\tau} (\frac{\pi}{2} + k\pi) \frac{a\pi}{4c}, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения получаем ответ

$$\omega = \frac{\pi}{2\tau}, \frac{3\pi}{2\tau}, \frac{5\pi}{2\tau}, \dots, \quad a = -\frac{8c\tau}{\pi^2}, \frac{8c\tau}{3\pi^2}, -\frac{8c\tau}{5\pi^2}, \dots \quad (7.11)$$

Вывод. Автоколебания в системе с релейным звеном (7.4) могут совершаться только на счетном множестве частот, которому соответствует счетное множество (7.11) значений амплитуды a .

Примером автоколебаний является скрип двери. Он всегда совершается с одинаковой громкостью и частотой независимо от приложенной внешней силы.

Упражнение 35. Проверьте условие фильтра (7.7) для релейного звена (7.3), ограничившись второй гармоникой $k = 2$.

7.6 Системы слежения за экстремумом

Системы слежения за экстремумом — одни из самых распространенных систем регулирования с нелинейными звеньями в обратной связи. Поставим задачу слежения за экстремумом (рис. 7.11).

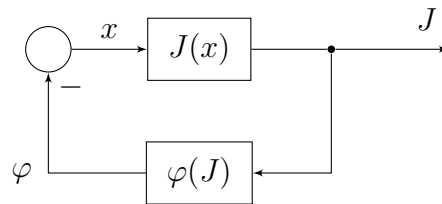


Рис. 7.11: Система слежения за экстремумом

Здесь $J(x)$ — целевая функция, про которую известно, что она непрерывно дифференцируема и имеет единственную точку минимума в заданной области, «несильно» отличаясь от квадратичной функции $c(x - x_0)^2$. Аналитическое выражение для $J(x)$ неизвестно, в частности, неизвестно значение констант c и x_0 . Предполагается, что для каждого x возможно вычисление $J(x)$. Требуется указать алгоритм вычисления обратной связи $\varphi(J)$ такой, чтобы выход системы x оставался вблизи точки x_0 минимума $J(x)$.

Алгоритм вычисления сигнала обратной связи $\varphi(J)$ использует оценку производной $J^{(1)}(x)$. Переход от состояния x_1 к состоянию x_2 осуществляется по правилу

$$x_2 = x_1 - hJ^{(1)}(x_1),$$

где h — параметр алгоритма. При малом шаге h и гладкой производной $J^{(1)}(x)$ переход от x_1 к x_2 направлен в сторону точки минимума x_0 (проверьте самостоятельно для случаев $J(x_1) > 0$ и $J(x_1) < 0$).

Приближенное значение производной $J^{(1)}(x_1)$ находится методом *синхронного детектирования*, или *методом периодического поискового сигнала*.

1. Состояние системы x_1 принудительно периодически изменяется на неболь-

шую величину:

$$x(t) = x_1(t) + e(t), \quad e(t) = \varepsilon \sin \omega t, \quad |\varepsilon| \ll |x_1(t)|.$$

2. Вычисляется среднее по времени значение

$$S(x_1) \doteq \overline{eJ(x_1 + e)}, \quad \text{где} \quad \overline{f(t)} \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

3. Вычисляется приближенное значение производной

$$J^{(1)}(x_1) \simeq \frac{2}{\varepsilon^2} S(x_1).$$

Обоснуем последнюю формулу. Предположим, что $J(x)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$J(x) = J(x_1) + J^{(1)}(x_1)e + \frac{1}{2}J^{(2)}(x_1)e^2 + o(e^2).$$

Тогда для $S(x_1)$ верно выражение

$$S(x_1) = \overline{eJ(x_1 + e)} = J(x_1)\bar{e} + J^{(1)}(x_1)\bar{e}^2 + \frac{1}{2}J^{(2)}(x_1)\bar{e}^3 + \dots$$

При малости отклонений e главную роль играют первые слагаемые с сомножителями $\bar{e}, \bar{e}^2, \bar{e}^3$. При усреднении сомножители \bar{e}, \bar{e}^3 обращаются в ноль ввиду следующей леммы.

Лемма. Пусть $f(t + \tau) = f(t)$ — периодическая функция с периодом τ такая, что $\int_0^\tau f(t) dt = 0$. Тогда $\bar{f} = 0$.

Доказательство. Верно соотношение

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T-k\tau} f(t) dt,$$

где k — число целых периодов, уместяющихся на отрезке $[0, T]$. Интеграл в правой части ограничен:

$$\left| \int_0^{T-k\tau} f(t) dt \right| \leq \int_0^\tau |f(t)| dt.$$

Следовательно, предельное значение для этого слагаемого равно нулю:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T f(t) dt \right| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = 0.$$

Лемма доказана. □

Для функций $\sin \omega t$, $\sin^3 \omega t$ с периодом $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ выполнено условие леммы $\int_0^\tau f(t) dt = 0$, значит, средние значения \bar{e} , $\bar{e^3}$ равны нулю. Вычислим среднее значение $\bar{e^2}$:

$$\bar{e^2} = \varepsilon^2 \overline{\sin^2 \omega t} = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) = \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

В результате $S(x_1) = J^{(1)}(x_1) \bar{e^2} + \dots \simeq \frac{1}{2} \varepsilon^2 J^{(1)}(x_1)$, откуда следует $J^{(1)}(x_1) \simeq \frac{2}{\varepsilon^2} S(x_1)$.

На рис. 7.12 приведена блок-схема системы с обратной связью для отслеживания экстремума на основе метода синхронного детектирования.

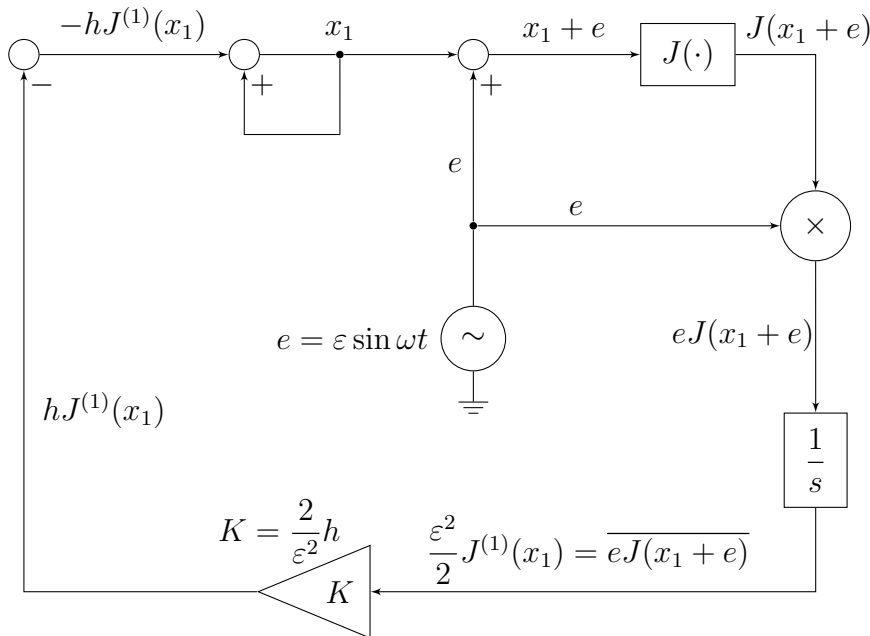


Рис. 7.12: Блок-схема системы слежения за экстремумом

«Петлю» $[-hJ^{(1)}(x_1)] \xrightarrow{\leftarrow} x_1$ в верхней части схемы следует понимать как обновление значения $x_1 = x_1 - hJ^{(1)}(x_1)$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Исследуйте на устойчивость решения уравнений в точках покоя:

$$\text{а) } x^{(1)} = \cos t, \quad x(0) = 0; \quad \text{б) } x^{(1)} = -x^2, \quad x(0) = 1.$$

2. Исследуйте характер нулевой точки покоя в системах уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1^{(1)} = -9x_1 + x_2, \\ x_2^{(1)} = 4x_2 - x_1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1^{(1)} = 2x_2 - 3x_1, \\ x_2^{(1)} = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

3. Составьте суждение об устойчивости системы

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -2x_1, \\ x_2^{(1)} = x_3 + x_1^2, \\ x_3^{(1)} = -x_2 \end{cases}$$

по линейному приближению в окрестности нулевой точки.

4. Проверьте, является ли функция $V(x) = x^4$ функцией Ляпунова для системы $x^{(1)} = -x^3 + x^5$ в окрестности нулевой точки равновесия. Устойчива ли нулевая точка по Ляпунову? Устойчива ли система в этой точке асимптотически?

5. Выбрав функцию Ляпунова $v(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, докажите устойчивость решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_2 + \left(\frac{x_1^3}{3} - x_1\right), \\ x_2^{(1)} = -x_1 \end{cases}$$

в круге $x_1^2 + x_2^2 < 3$.

6. Определите значения параметра α , при которых устойчивы нулевые решения систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1^{(1)} = 3\alpha x_2 - \alpha^2 x_1, \\ x_2^{(1)} = x_1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1^{(1)} = \alpha x_2 + 3x_1, \\ x_2^{(1)} = \alpha^2 x_2 - 2x_1. \end{cases}$$

7. Найдите область значений параметров α, β , при которых система уравнений устойчива:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -x_1 + \alpha x_2, \\ x_2^{(1)} = \beta x_1 - x_2. \end{cases}$$

Глава 8

Задачи оптимального управления

В этой главе познакомимся с задачами управления без обратной связи. Традиционно их называют задачами *оптимального управления*.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}x^{(1)}(t) &= f(x(t), u(t), t), & x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \\ u(t) &\in \Omega \subset \mathbb{R}^m,\end{aligned}\tag{8.1}$$

и заданы два момента времени $t_{\text{н}}$, $t_{\text{к}}$, векторы $x_{\text{н}}, x_{\text{к}} \in \mathbb{R}^n$ и функция $f_0(x, u, t) \in \mathbb{R}$. Задача состоит в том, чтобы найти управление $u(t) \in \Omega$, $t_{\text{н}} \leq t \leq t_{\text{к}}$, переводящее систему (8.1) из состояния $x(t_{\text{н}}) = x_{\text{н}}$ в состояние $x(t_{\text{к}}) = x_{\text{к}}$ таким образом, чтобы заданный функционал L принимал наименьшее возможное значение:

$$\begin{aligned}L \doteq \int_{t_{\text{н}}}^{t_{\text{к}}} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min \\ x(t_{\text{н}}) = x_{\text{н}}, \\ x(t_{\text{к}}) = x_{\text{к}}, \\ u(t) \in \Omega.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Рассматриваются также задачи, в которых начальный и конечный моменты времени не фиксированы.

Приведем примеры.

1. $f_0 = \|u(t)\|^2$. Это задача *на минимум расхода энергии*: перевести систему из состояния $x_{\text{н}}$ в состояние $x_{\text{к}}$ с наименьшей средней энергией управления $\|u(t)\|^2$.

2. $f_0 = 1$. Это задача *быстродействия*: перевести систему из состояния x_n в x_k за наименьшее время.

Если множество Ω допустимых значений управления $u(t)$ открытое, для решения поставленных задач можно использовать методы классического вариационного исчисления, разработанного Л. Эйлером и Ж. Лагранжем в XVIII в. На практике чаще встречаются задачи с замкнутыми множествами Ω , например, с ограничением $\|u(t)\| \leq 1$. В этом случае более удобны методы решения на основе *принципа максимума* Л. С. Понтрягина (1956) [4].

8.1 Принцип максимума Понтрягина

Пусть $u(t) \doteq u_{\text{опт}}(t)$ — решение задачи оптимального управления. Тогда в каждый момент времени t выполнено условие максимума¹

$$u_{\text{опт}}(t) = \arg \max_{u \in \Omega} \mathcal{H}(x(t), u, \lambda(t)), \quad (8.3)$$

где функция $\mathcal{H}(x, u, \lambda) \doteq -f_0(x, u, t) + \lambda^\top f(x, u, t)$ называется *функцией Понтрягина*. Вектор-функция $\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda_i^{(1)}(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t)), \quad i \in \overline{1, n}. \quad (8.4)$$

Функция \mathcal{H} соответствует *гамильтониану* в классическом вариационном исчислении. Уравнения (8.1), (8.4) можно записать, используя векторные обозначения, в виде пары *гамильтоновых уравнений*

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}, \\ \lambda^{(1)} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Все управления $u(t) \in \Omega$, обеспечивающие минимум функционала L (8.2), должны удовлетворять условиям (8.1), (8.3) и (8.4). Если уравнение (8.1) линейное, то перебором всех возможных начальных значений вектора $\lambda(0) \in \mathbb{R}^n$ находится множество управлений $u(t)$, среди которых будут и оптимальные

¹Его обычно формулируют как условие *минимума*. Для этого меняют знак у функции \mathcal{H} . Знак функции $\lambda(t)$ также изменяется вследствие уравнения (8.4).

управления $u_{\text{опт}}(t)$.

Рассмотрим задачу быстродействия ($f_0 = 1$) для линейной системы с ограничением на управление:

$$x^{(1)} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad |u_i| \leq 1. \quad (8.5)$$

Функция Понтрягина имеет вид

$$\mathcal{H} = -1 + \lambda^\top (Ax + Bu).$$

Оптимальное управление удовлетворяет условию максимума:

$$u_{\text{опт}} = \arg \max_{|u| \leq 1} \mathcal{H} = \arg \max_{|u| \leq 1} \lambda(t)^\top Bu.$$

Обозначим $\lambda(t)^\top B \doteq (g_1(t) \ \dots \ g_m(t))$. Это строка из m элементов. Тогда

$$\lambda^\top Bu = g_1 u_1 + g_2 u_2 + \dots + g_m u_m.$$

Для оптимальности необходимо максимизировать выражение в правой части. Отсюда следует, что для положительных компонент g_i соответствующие компоненты управления положительные $u_i = 1$, а для отрицательных g_i — отрицательные $u_i = -1$:

$$u_i(t) = \text{sign } g_i(t) = \pm 1. \quad (8.6)$$

Для определения функций $g_i(t)$ нужно взять вектор-функцию $\lambda(t)$, подчиняющуюся уравнению

$$\lambda^{(1)}(t)^\top = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\lambda^\top A, \quad \text{или} \quad \lambda^{(1)}(t) = -A^\top \lambda(t). \quad (8.7)$$

Для каждого начального значения $\lambda(0)$ находится функция $\lambda(t) = e^{-A^\top t} \lambda(0)$, затем вычисляются функции $g_i(t)$ и функции управления $u_i(t)$ (8.6). Итеративным перебором значений вектора $\lambda(0)$ находят функции $u_i(t)$, обеспечивающие минимум функционала (8.2). Это и будет оптимальное управление в задаче быстродействия для линейной системы (8.5).

Ввиду условия (8.6) оптимальное управление в задаче быстродействия для

линейной системы (8.5) имеет *релейный характер*, т. е. точка $u_{\text{опт}}(t)$ в фазовом пространстве \mathbb{R}^m перемещается от вершины к вершине параллелепипеда $|u_i| \leq 1$ (рис. 8.1).

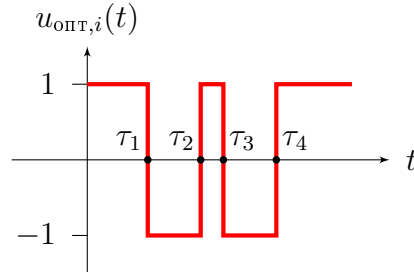


Рис. 8.1: Релейное управление

В качестве примера рассмотрим задачу быстрогодействия для системы второго порядка, описывающую движение материальной точки.

Уравнение движения следует из второго закона Ньютона: $y^{(2)} = u$, где $y \in \mathbb{R}$ — координата точки и $u \in \mathbb{R}$ — внешняя сила. Определим вектор фазовых переменных $x \in \mathbb{R}^2$ и зададим начальное $x_{\text{н}}$ и конечное $x_{\text{к}}$ положения:

$$x = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \end{bmatrix}, \quad x_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{\text{к}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение движения в фазовом пространстве \mathbb{R}^2 :

$$\begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \end{bmatrix}^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u.$$

В матричных обозначениях

$$x^{(1)} = Ax + Bu.$$

Уравнение (8.7) для вектора $\lambda(t)$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}^{(1)} = -A^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следуют уравнения $\lambda_1(t) = \text{const} \doteq \lambda_{10}$, $\lambda_2^{(1)} = -\lambda_1$,

$$\lambda_2(t) = -\lambda_{10}t + \lambda_{20}. \quad (8.8)$$

Далее, $\lambda(t)^\top B = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2(t) = -\lambda_{10}t + \lambda_{20}$. Тогда

$$u(t) = \text{sign } \lambda_2(t) = \text{sign } (-\lambda_{10}t + \lambda_{20}),$$

откуда следует, что момент τ переключения управления единственный.

Найдем момент переключения τ из краевых условий

$$x(0) = x_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(T) = x_{\text{к}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $t \in [0, \tau]$. На этом интервале ввиду $y(0) = 0$ и $y(T) = 1$ (координата увеличивается) подходит только значение $u = 1$. Из уравнения $y^{(2)} = u = 1$ следует $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2$. Из начальных условий $y(0) = 0$, $y^{(1)}(0) = 0$ получаем $c_1 = c_2 = 0$, тогда $y(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Пусть $t \in (\tau, T]$. Знак управления меняется $u = -1$. Из уравнения $y^{(2)} = -1$ следует $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + b_1t + b_2$. Рассмотрим уравнение для производной $y^{(1)}(t) = -t + b_1$. В момент τ производная $y^{(1)}$ не претерпевает разрыва (как интеграл от ступенчатой функции u), поэтому из уравнений

$$\begin{cases} y^{(1)}(\tau - 0) = \tau, \\ y^{(1)}(\tau + 0) = -\tau + b_1 \end{cases}$$

следует $b_1 = 2\tau$.

Из конечного условия $y^{(1)}(T) = 0$ получаем $-T + b_1 = 0$, тогда $b_1 = T$ и $\tau = \frac{1}{2}T$, т. е. момент переключения расположен на середине интервала $[0, T]$. В силу симметрии $y(\tau) = \frac{1}{2}$. Поскольку $y(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2$, получаем $\tau = 1$ и $T = 2$. Это и есть наилучшее возможное время управления.

8.2 Условия трансверсальности

Рассмотрим задачу оптимального управления в более общей формулировке. Вместо начального и конечного положений x_n, x_k системы (8.1) в фазовом пространстве \mathbb{R}^n зададим *гладкие многообразия* $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ допустимых значений $x_n \in P, x_k \in Q$. Это будет задача оптимального управления с *подвижными концами*.

Напомним определения. Пусть $g(x) \in \mathbb{R}$ — действительная функция, имеющая частные производные $\frac{\partial g}{\partial x_i}$. Уравнение $g(x) = 0$ задает многообразие точек $G \doteq \{x : g(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n-1$. Определим вектор-строку градиента $\nabla g(x) \doteq [\frac{\partial g}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g}{\partial x_n}]$. Для каждой точки $x \in G$ линейное уравнение $\nabla g(x) \cdot z = 0$ задает линейное многообразие $K_G(x)$ размерности $n-1$, состоящее из точек $z \in \mathbb{R}^n$. Многообразию $K_G(x)$ называют *касательной гиперплоскостью* к многообразию G в точке x .

Точки $x_* \in G$, в которых градиент обращается в ноль $\nabla g(x_*) = [0 \dots 0]$, называются *особыми точками* многообразия G . В этих точках многообразие G не имеет касательной гиперплоскости. Многообразие G размерности $n-1$ называется *гладким*, если оно не имеет особых точек.

Определим гладкое многообразие P размерности $n_P < n-1$ как *пересечение* некоторого числа k гладких многообразий G_i размерности $n-1$:

$$P \doteq G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k, \quad G_i = \{x : g_i(x) = 0\}, \quad g_i(x) \in \mathbb{R}.$$

Условием *гладкости* P является линейная независимость векторов градиентов $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ (в частности, все эти градиенты должны быть ненулевыми). *Касательная плоскость* $K_P(x)$ к многообразию P в точке $x \in P$ определяется как *пересечение* касательных гиперплоскостей $K_P(x) = K_{G_1}(x) \cap K_{G_2}(x) \cap \dots \cap K_{G_k}(x)$,

$$K_{G_i}(x) = \{z : \nabla g_i(x) \cdot z = 0\}.$$

Упражнение 36. Подсчитайте размерность многообразий P и K_P .

Говорится, что некоторый вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию трансверсальности* для точки $x \in P$, если этот вектор ортогонален касательной

плоскости $K_P(x)$: $\lambda \perp K_P(x)$. Условие трансверсальности равносильно тому, что вектор λ можно представить в виде линейной комбинации линейно независимых векторов градиентов: $\lambda = (c_1 \nabla g_1 + \dots + c_k \nabla g_k)^\top$.

Пусть даны гладкие многообразия $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ размерности соответственно n_P, n_Q и функция $f_0(x, u, t) \in \mathbb{R}$. Задача оптимального управления с подвижными концами состоит в том, чтобы найти управление $u(t) \in \Omega$, $t_H \leq t \leq t_K$, переводящее систему (8.1) из произвольной точки $x(t_H) \in P$ в произвольную точку $x(t_K) \in Q$ таким образом, чтобы заданный функционал L принимал наименьшее возможное значение:

$$L \doteq \int_{t_H}^{t_K} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} & x(t_H) \in P, \\ & x(t_K) \in Q, \\ & u(t) \in \Omega. \end{aligned}$$

Как и ранее, решение этой задачи оптимального управления находится из принципа максимума Понтрягина. Отличие состоит в том, что на подвижных концах нужно добавить *условия трансверсальности* на вектор вспомогательных переменных $\lambda(t)$.

А именно, пусть $u(t) \doteq u_{\text{опт}}(t)$ — решение задачи оптимального управления с подвижными концами (8.9). Тогда в каждый момент времени t выполнено условие максимума

$$u_{\text{опт}}(t) = \arg \max_{u \in \Omega} \mathcal{H}(x(t), u, \lambda(t)), \quad (8.10)$$

где

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) \doteq -f_0(x, u, t) + \lambda^\top f(x, u, t).$$

Вектор-функция $\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix}$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda_i^{(1)}(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t)), \quad i \in \overline{1, n} \quad (8.11)$$

с дополнительными условиями трансверсальности

$$\lambda(t_n) \perp K_P(x(t_n)), \quad \lambda(t_k) \perp K_Q(x(t_k)).$$

В качестве примера рассмотрим предыдущую задачу быстрогодействия для системы второго порядка, изменив условие на правом конце траектории: $x(T) = [1_*]$, где $*$ обозначает любое действительное число. Это означает, что мы хотим не плавно (с нулевой скоростью $y^{(1)} = 0$) поместить точку в положение $y = 1$, а прийти туда с любой скоростью $y^{(1)} = *$ за наименьшее время. В этом случае управляемая материальная точка уже не является транспортным средством, которое нужно плавно привести в заданное конечное положение, а может быть снарядом, запущенным для поражения мишени. Тогда

$$x(T) \in Q = \{x : x_1 - 1 = g(x) = 0\}, \quad \nabla g(x) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} \right] = [1 \quad 0],$$

$K_Q = \{z : [1 \quad 0]z = 0\}$. Условие трансверсальности имеет вид

$$\lambda(T) = c\nabla g(x) = [* \quad 0],$$

т. е. $\lambda_2(T) = 0$. Учитывая линейность зависимости $\lambda_2(t)$ (8.8) получаем, что внутри интервала движения $t \in (0, T)$ точек переключения управления нет. Следовательно, оптимальным управлением будет постоянное значение $u \equiv 1$ без переключения. Наименьшее время движения T вычисляется из уравнения $y(T) = \frac{1}{2}T^2 = 1$, тогда $T = \sqrt{2} < 2$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте задачу перевода материальной точки в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 из состояния покоя в начале координат в состояние покоя в заданной точке $b \in \mathbb{R}^3$ за минимальное время при ограничении на максимальную величину модуля управляющего воздействия. Система уравнений движения точки $mr^{(2)} = f$, где $r \in \mathbb{R}^3$ — радиус-вектор положения, $f \in \mathbb{R}^3$ — вектор управляющего воздействия.

2. Сформулируйте задачу поворота вала двигателя на заданный угол при минимальной затрате энергии и ограничении максимальной силы тока:
 а) с остановкой в конечной точке; б) без остановки.

3. Определите оптимальное управление и оптимальную траекторию в следующих задачах оптимального управления:

а) $x_1^{(1)} = x_2$, $x_2^{(1)} = u$, $|u| \leq 1$, $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_1(T) = x_T$,
 $x_2(T) = 0$, $L = T \rightarrow \min$.

б) $x_1^{(1)} = x_2$, $x_2^{(1)} = u - 1$, $|u| \leq 2$, $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,
 $x_1(T) = x_T$, $L = T \rightarrow \min$.

б) $x_1^{(1)} = x_2$, $x_2^{(1)} = u$, $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_1(T) = x_T$,
 $L = \int_0^T u^2 dt \rightarrow \min$.

Глава 9

Обратные задачи теории управления

В задачах оптимального управления, рассмотренных в предыдущей главе, уравнение системы считается известным. Такого рода задачи принято называть *прямыми*. С другой стороны, типичным является случай, когда уравнение системы известно приближенно, или его коэффициенты медленно меняются со временем по неизвестному закону. В этом случае естественно возникает *обратная* задача вычисления неизвестных параметров уравнения по наблюдению некоторого множества его решений. К обратным задачам относятся, например, задачи идентификации состояния объектов и систем управления (как технических, так и биологических, экономических) по прямым или косвенным измерениям функций на входе и выходе.

Ограничимся дискретными системами. Для упрощения обозначений рассмотрим уравнения порядка $n = 2$ (для более высоких порядков все делается по аналогии). Пусть $u[k], x[k] \in \mathbb{R}$, $k \in \overline{1, N}$ — сеточные функции на входе и выходе объекта. Объединив векторы $u[k]$ и $x[k]$, определим вектор-функцию *процесса*

$$z \doteq \left[x[1] \ \dots \ x[N] \ u[1] \ \dots \ u[N] \right]^T \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Опишем объект разностным уравнением

$$\begin{aligned} x[k+2] + \alpha_1 x[k+1] + \alpha_0 x[k] &= \beta_2 u[k+2] + \beta_1 u[k+1] + \beta_0 u[k], \\ k &\in \overline{1, N-2}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Или в матричном виде

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & 0 & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \\ & & \ddots & \dots & \ddots & & & \ddots & \dots & \ddots \\ 0 & & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & 0 & & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{array} \right]}_G \times \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} x[1] & \dots & x[N] & u[1] & \dots & u[N] \end{array} \right]}_z^\top = 0. \quad (9.2)$$

Матрицы $G \doteq \|G_{ij}\|$ такого рода (когда значение элемента G_{ij} зависит только от разности индексов $i - j$) называют *теплицевыми*, по имени немецкого математика Отто Тёплица (1881–1940).

Зададим вектор параметров $\theta \doteq [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2]^\top \in \mathbb{R}^v$. Система уравнений (9.2) запишется в кратко

$$Gz = 0, \quad G \doteq G_\theta \in \mathbb{R}^{(N-n) \times 2N}. \quad (9.3)$$

Будем предполагать, что объект описывается уравнением (9.3) при некотором «истинном» значении $\theta = \theta_*$ вектора параметров. Само уравнение $G_\theta z = 0$ будем называть *моделью* объекта. Задача состоит в том, чтобы подобрать оптимальное в некотором смысле значение $\hat{\theta} \in \Omega$ параметров модели, имея в руках наблюдения процессов z с возмущениями.

Обратим внимание на предположение, что уравнение модели *точно* описывает объект при правильном задании параметров $\theta = \theta_*$. Вообще говоря, это условие практически никогда не выполняется, потому что математическая модель не может отразить всех свойств реального объекта, только самые существенные. Но в данной главе мы ограничимся самыми первоначальными представлениями о соответствии модели и объекта.

9.1 Оценивание процессов в системах управления по наблюдениям с возмущениями

Пусть $\tilde{z} \doteq z_* + \eta_* \in \mathbb{R}^{2N}$ — наблюдение процесса z_* в объекте $G_{\theta_*} z_* = 0$ и $\eta_* \in \mathbb{R}^{2N}$ — вектор возмущений. Звездочкой $*$ помечены истинные (ненаблюдаемые напрямую) величины. Для некоторого фиксированного θ обозначим множество решений уравнения (9.3)

$$\mathcal{Z}_\theta \doteq \{z : G_\theta z = 0\}.$$

Это линейное многообразие в \mathbb{R}^{2N} . Каждая «точка» $z \in \mathcal{Z}_\theta$ есть процесс, являющийся решением уравнения (9.1). Этот процесс однозначно определяется начальными условиями $x[1], x[2], \dots, x[n]$ и функцией входа $u[1], \dots, u[N]$. Отсюда следует, что размерность многообразия \mathcal{Z}_θ равна $n + N$.

Сформулируем первую обратную задачу¹.

Задача 1 (фильтрации). Дано наблюдение \tilde{z} процесса в объекте и значение параметра θ . Среди линейного многообразия модельных процессов \mathcal{Z}_θ нужно найти процесс \hat{z} , ближайший к \tilde{z} (рис. 9.1), подбирая начальные условия и значения функции входа модельного уравнения.

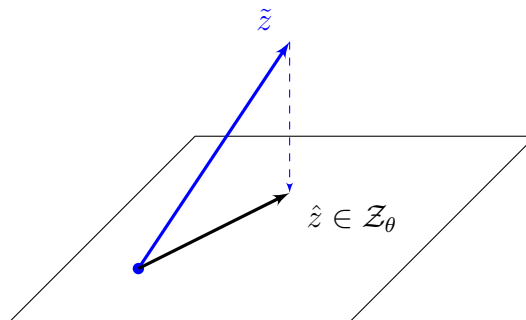


Рис. 9.1: Линейная задача фильтрации

Название задачи (фильтрация) показывает, что ее решение \hat{z} трактуется как процесс, полученный удалением (фильтрацией) возмущений η_* из измерения \tilde{z} . Поскольку «точные» значения z_* и η_* по условию задачи недо-

¹Постановки и решения первой и второй обратных задач были предложены А. О. Егоршиным (1971).

ступны прямому наблюдению, вместо них используются *оценки*

$$\hat{z} \doteq \arg \min_{z \in \mathcal{Z}_\theta} \|\tilde{z} - z\|^2, \quad \hat{\eta} \doteq \tilde{z} - \hat{z}.$$

Решение задачи 1. Определим целевую функцию

$$J(z) \doteq \frac{1}{2} \|\tilde{z} - z\|^2 = \frac{1}{2} (\tilde{z} - z)^\top (\tilde{z} - z). \quad (9.4)$$

Нужно найти минимум $J(z)$ при условии $Gz = 0$, $G = G_\theta$. Введением вектора множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^{N-n}$ задача сводится к безусловной минимизации по z и λ функции

$$J^*(z) \doteq \frac{1}{2} (\tilde{z} - z)^\top (\tilde{z} - z) + \lambda^\top Gz.$$

Необходимое условие минимума состоит в равенстве нулю производных J^* по z и λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial J^*}{\partial z} = \frac{\partial J}{\partial z} + \lambda^\top G = (\tilde{z} - \hat{z})^\top + \lambda^\top G, \\ \frac{\partial J^*}{\partial \lambda} = Gz = 0. \end{cases} \quad (9.5)$$

Из первого уравнения после транспонирования и умножения слева на матрицу G получаем

$$GG^\top \lambda + G(\tilde{z} - \hat{z}) = GG^\top \lambda + G\tilde{z} = 0,$$

откуда $\lambda = -(GG^\top)^{-1} G\tilde{z}$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (9.5), получим решение задачи фильтрации

$$\hat{z} = \underbrace{\left(I - G^\top (GG^\top)^{-1} G \right)}_{I-P} \tilde{z}. \quad (9.6)$$

Матрица $I - P$ есть матрица *проектора* на подпространство \mathcal{Z} решений уравнения $Gz = 0$. Определяющим свойством таких матриц является то, что их квадрат равен самой матрице: $(I - P)^2 = (I - P)$.

Упражнение 37. Проверьте равенства $P^2 = P$ и $(I - P)^2 = (I - P)$ для матрицы $P = G^\top (GG^\top)^{-1} G$.

Упражнение 38. Докажите, что если P — проектор, то $I - P$ проектор,

и наоборот.

Рассмотрим пример.

Задача. Для вектора $\tilde{z} \doteq [\tilde{x}[1] \dots \tilde{x}[N]]^\top \in \mathbb{R}^N$ найти коэффициенты c_0, c_1 многочлена первой степени $z[k] = c_0 + c_1 k$, минимизирующие целевую функцию $J = \frac{1}{2} (\tilde{z} - z)^\top (\tilde{z} - z)$ (9.4).

Решение 1. Сведем задачу к предыдущей. Множество многочленов $z[k] = c_0 + c_1 k$ (при всех возможных c_0, c_1) совпадает со множеством решений разностного уравнения

$$\begin{aligned} (\zeta - 1)^2 z[k] &= (\zeta^2 - 2\zeta + 1) z[k] = \\ &= z[k+2] - 2z[k+1] + z[k] = 0, \end{aligned} \quad (9.7)$$

где ζ — символ сдвига вперед. Полезно сравнить это утверждение со случаем непрерывного времени, для которого известно, что все решения уравнения $z^{(2)}(t) = 0$ имеют вид $z(t) = c_0 + c_1 t$; перейти от непрерывного к дискретному времени можно заменой производной на разностный оператор $\frac{1}{h}(\zeta - 1)$ и второй производной — на оператор $\frac{1}{h^2}(\zeta - 1)^2$.

Выпишем матрицу G для разностного уравнения (9.7) и применим формулу (9.6). Матрица G в данном случае имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача решена.

Программа для среды Scilab:

```
N=50;
z=1:(9/(N-1)):10;
z=z';
zm=z+5*rand(z,'normal');
row=[1,-2,1,zeros(1,N-3)];
col=[1; zeros(N-3,1)];
```

```
G=toeplitz(col,row);
Pi = G'*inv(G*G')*G;
zp=(eye(Pi)-Pi)*zm;
clf; plot(z); plot(zm,'g'); plot(zp,'r')
```

Решение 2. Поскольку $z[k] = c_0 + c_1 k$, можем сразу написать

$$z = \begin{bmatrix} z[1] \\ z[2] \\ \vdots \\ z[N] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}}_c \doteq Hc.$$

Тогда $J = \frac{1}{2} (\tilde{z} - Hc)^\top (\tilde{z} - Hc)$ и имеем задачу безусловной минимизации $J \rightarrow \min_{c \in \mathbb{R}^2} J$. Из необходимого условия минимума $\frac{\partial J}{\partial c} = (\tilde{z} - Hc)^\top (-H) = 0$ получаем хорошо известную формулу метода наименьших квадратов $c = (H^\top H)^{-1} H^\top \tilde{z}$, из которой следует решение

$$z = Hc = H (H^\top H)^{-1} H^\top \tilde{z} \doteq P_H \tilde{z}.$$

Несложно проверить, что матрица P_H — проектор ($P_H^2 = P_H$).

Столбцы матрицы H образуют фундаментальную систему решений разностного уравнения (9.7). Верны равенства $GH = 0$ и $P_H = I - \Pi$.

Для неоднородных разностных уравнений (9.1) фундаментальная система решений выписывается через матрицы A, B, C равносильной формы Фробениуса (5.14):

$$H = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ CA & CB & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ CA^{N-1} & CA^{N-2}B & \dots & CB & 0 \end{bmatrix}.$$

Упражнение 39. Выпишите решения 1 и 2 задачи аппроксимации заданной сеточной функции $\tilde{z} \in \mathbb{R}^N$: а) многочленом нулевой степени; б) многочленом второй степени.

Упражнение 40. Выпишите решения 1 и 2 задачи аппроксимации заданной сеточной функции $\tilde{z} \in \mathbb{R}^N$ гармонической функцией

$$z[k] = c_1 \sin \omega k + c_2 \cos \omega k.$$

Указание. Функции $\sin \omega k$, $\cos \omega k$ образуют фундаментальную систему решений разностного уравнения

$$z[k+2] - 2 \cos \omega \cdot z[k+1] + z[k] = 0.$$

Замечание. При больших значениях N вычисление проекции (9.6) предпочтительно производить рекуррентно по N , учитывая теплицевую разреженную структуру матрицы G . Получаемые при этом формулы равносильны формулам *стационарного фильтра Калмана*. Заметим также, что сформулированную выше задачу 1 еще называют задачей *сглаживания*, оставляя слово «фильтрация» для случая рекуррентных вычислений.

9.2 Идентификация параметров уравнений по наблюдениям процессов с возмущениями

Предположим теперь, что при решении задачи 1 (фильтрации) значение параметра модели θ можно подстраивать. Для разных значений параметров θ_1, θ_2 по формуле (9.6) будут получены разные оценки траектории $\hat{z}(\theta_1)$ и $\hat{z}(\theta_2)$. Понятно, что значение параметра θ , которое соответствует меньшей ошибке $\|\tilde{z} - \hat{z}(\theta)\|$, является предпочтительным.

Сформулируем вторую обратную задачу.

Задача 2 (идентификации). Дано измерение \tilde{z} процесса в объекте и модель объекта (9.1). Найти значение параметра θ , которое соответствует наименьшей норме ошибки фильтрации $\|\tilde{z} - \hat{z}(\theta)\|$.

Заметим, что в формулировке задачи уже определена целевая функция, минимизацией которой находится решение:

$$J(\theta) = \|\tilde{z} - \hat{z}(\theta)\|^2. \quad (9.8)$$

Геометрический смысл ее состоит в том, чтобы подбором параметров θ найти такую «модельную плоскость» \mathcal{Z}_θ , которая ближе всего расположена к измеренному процессу \tilde{z} (рис. 9.1). При этом для вычисления расстояния от плоскости \mathcal{Z}_θ до точки \tilde{z} нужно решать задачу 1.

В отличие от задачи 1, задача 2 уже не имеет решения в виде явной фор-

мулы. Приведем алгоритм итеративного поиска оптимального θ .

Используя решение задачи 1 (9.6), получим явное выражение для целевой функции $J(\theta)$:

$$\begin{aligned} J(\theta) = J(\hat{z}(\theta)) &= (\tilde{z} - \hat{z})^\top (\tilde{z} - \hat{z}) = \tilde{z}^\top \Pi^\top \Pi \tilde{z} = \tilde{z}^\top \Pi \tilde{z} = \\ &= \tilde{z}^\top G^\top (GG^\top)^{-1} G \tilde{z}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Сделаем замену, «переставив сомножители»

$$Gz \equiv Z\gamma, \quad \gamma \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (9.10)$$

Чтобы такая перестановка стала возможной, матрица Z должна быть сформирована особым образом. Распишем подробнее:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & 0 & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \\ & & \ddots & \dots & \ddots & & & \ddots & \dots & \ddots \\ 0 & & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & 0 & & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{array} \right]}_G \times \\ &\quad \times \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} x[1] & \dots & x[N] & u[1] & \dots & u[N] \end{array} \right]^\top}_{z} \equiv \\ &\equiv \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} x[3] & & & u[1] & u[2] & u[3] \\ x[4] & x[1] & x[2] & u[2] & u[3] & u[4] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[N] & x[N-2] & x[N-1] & u[N-2] & u[N-1] & u[N] \end{array} \right]}_Z \times \\ &\quad \times \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{array} \right]^\top}_{\gamma}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

После замены $G\tilde{z} = \tilde{Z}\gamma$ целевая функция (9.9) примет вид

$$J(\theta) = \gamma^\top \tilde{Z}^\top \underbrace{(GG^\top)^{-1}}_C \tilde{Z}\gamma \doteq \gamma^\top \tilde{Z}^\top C \tilde{Z}\gamma. \quad (9.12)$$

Формально решение дается выражением

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta). \quad (9.13)$$

Упражнение 41. Проверьте, что целевая функция $J(\theta)$ (9.12) не зависит от нормы вектора γ .

Вычислительное решение (А. О. Егоршин, М. Осборн, 1970–73). Основу алгоритма составляют *итерации с обновляемой обратной матрицей*:

- 1) начальное значение: $\gamma = \gamma_{(0)}$;
- 2) для $k \geq 0$

$$\begin{cases} \tau = Q_{(k)}^{-1} \gamma_{(k)}, & Q_{(k)} \doteq \tilde{Z}^\top C_{(k)} \tilde{Z}, & C_{(k)} \doteq C(\gamma_{(k)}), \\ \gamma_{(k+1)} = \frac{1}{(10\dots 0)_\tau} \tau. \end{cases} \quad (9.14)$$

Последняя строчка означает деление вектора τ на его первый элемент, чтобы значение первого элемента $\gamma_{(k+1)}$ равнялось единице. Итерационная процедура (9.14) имеет малую чувствительность к начальному приближению $\gamma_{(0)}$ и сходится в большинстве случаев за 2–5 шагов. В 2018 г. были доказаны следующие ее свойства:

1. При малых возмущениях $\varepsilon \doteq \|\tilde{z} - z_*\|$ для почти всех начальных значений $\gamma_{(0)}$ (за исключением множества меры ноль) существует предельная точка $\gamma_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{(k)}$.
2. Точка γ_∞ лежит в малой окрестности истинного значения γ_* , и ошибка идентификации уменьшается ($\gamma_\infty \rightarrow \gamma_*$) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Программа для среды Scilab:

```
// Идентификация с использованием итераций (9.14)
N=100; //длина траектории
sigma=4; //с.к.о. ошибок наблюдений
```

```

//0
// К-ты разностного уравнения (эталон)
gamma0(1)=0.9607843; gamma0(2)=-1.8984652;gamma0(3)=1;
p=2;
theta_etalon=[ gamma0(1); gamma0(2)]; //эталон параметров
// Процесс:
z=zeros(N);
z(1)=grand(1,1,'nor', 0, 2); // случайные нач. условия
z(2)=grand(1,1,'nor', 0, 2);
for k=1:N-p
    z(k+p)=-gamma0(1:length(gamma0)-1) '*z(k:k+p-1);
end//k
// Наблюдение процесса:
zm=zeros(N);
for k=1:N
    zm(k)=z(k) + grand(1,1,'nor', 0, sigma);
end//k
// Матрица наблюдений:
V=zeros(N-p,p+1); for k=1:p+1 V(:,k)=zm(k:N-p-1+k);
end//k
//1
// Итерации по параметрам:
theta0=[0.1;-0.1]; gamma1=[theta0;1]; //нач. значения
row=[gamma1' zeros(1,N-p-1) ];
col=[gamma1(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row); C = inv(G*G');
gamma_print=gamma1'; //накопитель знач. на итерациях
for k=1:20 //цикл итераций по параметрам

    P=V'*C*V; Pinv=inv(P);
    tt=Pinv*gamma1; gamma1=tt/tt(length(tt));
    gamma_print=[gamma_print;gamma1'];
    row=[gamma1' zeros(1,N-p-1) ];

```

```

col=[gamma1(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row); C = inv(G*G');

end//k (конец цикла)
//2
// Вывод результатов:
Pi = eye(G'*G) - G'*C*G;
zp = Pi * zm; //оценка траектории (фильтрация)
clf; plot(zm,'g'); plot(z); plot(zp,'r'); //графики
gamma_print //печать значений параметров на итерациях
theta_etalon' //эталон

```

Вычисление оптимального значения параметров уравнения (9.1) путем минимизации целевой функции (9.8) в литературе называют «модифицированный метод Пронь». При использовании вычислительного алгоритма (9.14) говорят о «вариационном методе» идентификации (А. О. Егоршин, 1988).

9.3 Другие методы идентификации

Определение. *Оценкой* параметров θ уравнения (9.1) называется функция наблюдений $\hat{\theta}(\tilde{z})$ со следующими свойствами:

- 1) единственность: $\hat{\theta}(z_*) = \theta_*$;
- 2) непрерывность: $\hat{\theta}(z_* + \eta) \xrightarrow{\|\eta\| \rightarrow 0} \theta_*$.

Вообще говоря, решение любой задачи, которое является единственным и непрерывно зависит от исходных данных, называется *корректным по Адамару*, или корректным в классическом смысле. Если задача не имеет такого решения, то она считается некорректно поставленной.

Методом идентификации естественно назвать любой метод вычисления оценок параметров с перечисленными выше свойствами. Из приведенного выше примера задачи 2 (идентификации) можно увидеть, что решение складывается из двух шагов:

- определение целевой функции;
- выбор вычислительного метода поиска минимума.

Итерации (9.15) приведены для сравнения с итерациями (9.14). Они не используют симметричности матрицы Q , поэтому лучше применять стандартные алгоритмы вычисления собственных чисел и собственных векторов вещественной симметричной матрицы Q .

Программа для среды Scilab имеет следующий вид (приведены отличия от программы идентификации с использованием итераций Егоршина—Осборна на с. 165):

```
// Идентификация методом ортогональной регрессии
sigma=2; //с.к.о. ошибок наблюдений
//0
...
//1
[R,Lambda]=spec(V'*V) //вычисление с. вект. и с. чисел
gamma1=R(1:p+1,1); // оценка вектора параметров
//матрицы для оценки процесса:
row=[gamma1' zeros(1,N-p-1) ];
col=[gamma1(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row); C = inv(G*G');
//2
...
```

Упражнение 42. Экспериментально сравните отклонения оценок параметров от эталонных значений для первого и второго метода идентификации. Объясните ухудшение качества фильтрации при использовании оценок по второму методу. Опытным путем установите уровень σ погрешностей наблюдения, при котором качество фильтрации становится приемлемым.

Третий метод идентификации параметров системы (9.1) отличается наиболее простой целевой функцией. Вместо целевой функции (9.12) используется целевая функция *линейного метода наименьших квадратов* (МНК):

$$J_{\text{МНК}}(\theta) \doteq \gamma^T \tilde{Z}^T \tilde{Z} \gamma, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

Поясним смысл целевой функции $J_{\text{МНК}}(\theta)$. Ввиду (9.10) уравнение модели $Gz = 0$ равносильно уравнению $Z\gamma = 0$. Если заменить матрицу Z матрицей наблюдений \tilde{Z} , в правой части вместо нуля получим вектор *невязки уравнения* $e \doteq \tilde{Z}\gamma$. Поэтому целевая функция $J_{\text{МНК}}(\theta)$ есть квадрат нормы невязки уравнения при подстановке вместо точного решения Z наблюдений \tilde{Z} : $J_{\text{МНК}}(\theta) = e^\top e$.

Оптимальное значение вектора параметров θ вычисляется из равенства

$$\frac{\partial}{\partial \theta} J_{\text{МНК}}(\theta) = 2e^\top \frac{\partial}{\partial \theta} e = 0.$$

Воспользуемся представлением

$$e(\theta) = \tilde{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} \doteq \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 \theta, \quad \tilde{Z}_1 \doteq [x[3] \ x[4] \ \dots \ x[N]]^\top,$$

$$\tilde{Z}_2 \doteq \left[\begin{array}{cc|ccc} x[1] & x[2] & u[1] & u[2] & u[3] \\ x[2] & x[3] & u[2] & u[3] & u[4] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-1] & u[N-2] & u[N-1] & u[N] \end{array} \right].$$

Тогда $e^\top \frac{\partial}{\partial \theta} e = (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 \theta)^\top \tilde{Z}_2 = 0$, откуда следует ответ

$$\hat{\theta}_{\text{МНК}} = -(\tilde{Z}_2^\top \tilde{Z}_2)^{-1} \tilde{Z}_2^\top \tilde{Z}_1. \quad (9.18)$$

Упражнение 43. Напишите программу Scilab для решения задачи идентификации методом наименьших квадратов.

Упражнение 44. Докажите, что условием единственности оценок $\hat{\theta}$ (9.13), $\hat{\theta}_{\text{ОР}}$ (9.15), $\hat{\theta}_{\text{МНК}}$ (9.18) является неособенность матрицы $Z_{*2}^\top Z_{*2}$.

Упражнение 45. Докажите непрерывность оценки $\hat{\theta}_{\text{МНК}}$ (9.18). Помощью вычислительного эксперимента проверьте непрерывность оценок $\hat{\theta}$ (9.13), $\hat{\theta}_{\text{ОР}}$ (9.15).

9.4 Сравнение методов идентификации

Все три рассмотренных выше метода идентификации приводят к точному решению при малых возмущениях. Поэтому возникает вопрос, насколько оправданы вычислительные затраты, присущие первому методу? Из результатов вычислительных экспериментов можно заключить, что первый метод обеспечивает наиболее устойчивые оценки с наилучшим качеством фильтрации возмущений. Ввиду этого он является безусловно предпочтительным, если нет ограничений на вычислительные ресурсы.

Обсудим, какие теоретические утверждения можно сделать о преимуществах того или иного метода идентификации. Здесь на помощь приходит понятие *вероятности*, которое возникает при многократном повторении вычислительного эксперимента с различными возмущениями. Напомним, вероятностью события называют предельное значение относительной частоты его появления (при условии, что такой предел существует).

С точки зрения экспериментатора, все вероятностные предположения относительно возмущений являются не более чем умозрительными гипотезами. С точки зрения математика, умозрительный и умопостигаемый мир не менее реален, чем мир, осязаемый органами чувств посредством приборов. В нашей задаче вероятностные предположения будут играть вспомогательную роль, которую русский математик А. А. Марков (1856–1922) (соавтор известной теоремы Гаусса—Маркова и создатель теории случайных процессов, названных по его имени марковскими) выразил следующими словами: «Вероятность ... есть только средство для условного сравнения достоинства различных наблюдений».

Пусть дано множество наблюдений процессов

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \{\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(L)}\} \subset \mathbb{R}^N, \quad \tilde{z}_{(i)} = z_{*(i)} + \eta_{(i)},$$

где векторные величины $z_{*(i)}, \eta_{(i)} \in \mathbb{R}^N$ являются случайными, независимыми и одинаково распределены для разных i :

$$\mathbf{M} \eta_{(i)} = 0, \quad \mathbf{M} \eta_{(i)} \eta_{(i)}^\top = \sigma^2 I,$$

где \mathbf{M} — символ математического ожидания.

Оценка параметра вычисляется уже не по одному измерению процесса \tilde{z} , а по всему множеству наблюдений:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(L)}).$$

Определение. *Состоятельностью* оценки $\hat{\theta}$ называется свойство сходимости с вероятностью 1 к истинному значению θ_* при увеличении объема L выборки случайных наблюдений:

$$\hat{\theta}(\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(L)}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \theta_*.$$

Состоятельность также можно определять через сходимость в предельном случае увеличения длины N одного наблюдаемого процесса:

$$\hat{\theta}(\tilde{z}_{(1)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \theta_*.$$

Заметим, что состоятельность оценки не предполагает малости нормы возмущений $\|\eta_{(i)}\|$, и это существенно.

Утверждение 23. Оценки $\hat{\theta}$ (9.13) и $\hat{\theta}_{\text{ОР}}$ (9.15) состоятельны. Оценка $\hat{\theta}_{\text{МНК}}$ (9.18) не состоятельна.

Упражнение 46. Проверьте утверждение 23 путем вычислительного эксперимента. *Указание:* при наблюдении нескольких процессов $\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(L)}$ матрица \tilde{Z} формируется последовательно из матриц для каждого процесса:

$$\tilde{Z}^\top = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{(1)}^\top & \tilde{Z}_{(2)}^\top & \dots & \tilde{Z}_{(L)}^\top \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z}_{(i)} \doteq Z(\tilde{z}_{(i)}).$$

Два состоятельных метода сравнивают между собой по *асимптотической дисперсии* оценок:

$$D(\hat{\theta}) \doteq L \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left(\hat{\theta}(\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(L)}) - \theta_* \right) \left(\hat{\theta}(\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(L)}) - \theta_* \right)^\top.$$

Утверждение 24. Оценка $\hat{\theta}$ (9.13) асимптотически лучше оценки $\hat{\theta}_{\text{ОР}}$ (9.15): $D(\hat{\theta}) < D(\hat{\theta}_{\text{ОР}})$.

Упражнение 47. Путем вычислительного эксперимента проверьте утвер-

ждение 24. *Указание:* математическое ожидание $\mathbf{M}x$ приближенно вычисляется как эмпирическое среднее

$$\mathbf{M}x \simeq \frac{1}{M} (x_1 + \dots + x_M),$$

где x_i — значения случайной величины x , полученные в экспериментах с разными значениями случайного вектора возмущений. Как правило, достаточно принять $M = 50$.

Представляет интерес сравнение дисперсий D_1 оценок на выборках конечного объема $L = 1$:

$$D_1(\hat{\theta}) \doteq \mathbf{M} \left(\hat{\theta}(\tilde{z}) - \theta_* \right) \left(\hat{\theta}(\tilde{z}) - \theta_* \right)^\top.$$

Вычисление дисперсии D_1 оценки $\hat{\theta}$ (9.13) без условия малости нормы возмущения $\|\eta\|$ является нерешенной задачей.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте задачу выделения гармонической функции заданной частоты (с неизвестной фазой и амплитудой) из наблюдаемого с возмущениями процесса на дискретном временном интервале $k \in \overline{1, N}$ как задачу условной минимизации некоторой целевой функции. Напишите вычислительный алгоритм решения для среды Scilab.
2. Сформулируйте задачу выделения гармонической функции с экспоненциально затухающей амплитудой (с неизвестными фазой, декрементом затухания, частотой и амплитудой) из наблюдаемого с возмущениями процесса на дискретном временном интервале $k \in \overline{1, N}$ как задачу условной минимизации некоторой целевой функции.
3. Сформулируйте задачу оценки времени полураспада радиоактивного вещества по наблюдаемому с ошибками процессу уменьшения концентрации вещества на дискретном временном интервале $k \in \overline{1, N}$ как задачу условной минимизации некоторой целевой функции.

4. Укажите целевые функции для решения задач 2, 3: а) методом наименьших квадратов; б) методом ортогональной регрессии; в) вариационным методом идентификации (модифицированным методом Прони).
5. Решите задачу выделения гармонической функции заданной частоты ω из наблюдаемого с возмущениями процесса на дискретном временном интервале $k \in \overline{1, N}$ двумя способами: 1) построением проектора с матрицей G и 2) проецированием на пространство, натянутое на столбцы матрицы базисных функций

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \omega & \cos \omega \\ \vdots & \vdots \\ \sin (N-1) \omega & \cos (N-1) \omega \end{bmatrix}.$$

Проверьте полученные формулы вычислениями в Scilab.

Глава 10

Лабораторный практикум

Лабораторные работы выполняются на компьютерах с операционными системами семейства Windows (или Linux с эмулятором wine).

10.1 Введение в систему схемотехнического моделирования Micro-Cap Demo

Система схемотехнического моделирования Micro-Cap Demo (демонстрационная студенческая версия) (www.spectrum-soft.com) является удобным и простым инструментом для исследования линейных систем управления с обратными связями. Она имеет развитый интуитивно понятный графический интерфейс и мощный графический редактор схем, а также нетребовательна к ресурсам компьютера [10].

Цели лабораторной работы:

- познакомиться с базовыми возможностями системы Micro-Cap;
- построить операторные представления звеньев систем управления, описываемых линейными стационарными дифференциальными уравнениями;
- построить и исследовать поведение решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами;
- построить простейшие системы с отрицательными обратными связями и исследовать их поведение.

Ход работы (2–4 ч).

1. Загрузите с сайта www.spectrum-soft.com и установите программную систему Micro-Cap Demo.
2. Ознакомьтесь с интерфейсом графического редактора схем.
3. Соберите последовательную схему из заземления «Ground», источника постоянного напряжения «Voltage Source», функционального блока «F». В свойствах источника установите значение «1», в свойствах блока «F» укажите дробно-рациональное выражение « $1/(1+s)$ ». Включите нумерацию узлов схемы (кнопка «1» в третьем сверху ряду кнопок). Узлы будут пронумерованы «1» и «2».
4. Запустите анализ переходной характеристики (меню «Analysis > Transient»). В появившемся окне свойств графиков в центре снимите галочку «Operating point». Установите временной интервал «Time Range» 20. Проверьте, что номера узлов «1» и «2» отражены в окне свойств графиков («v(1)», «v(2)'). Для диапазонов «XRange», «YRange» выберите значение «AutoAlways». Нажмите кнопку «Run».
5. Проанализируйте и объясните появившиеся графики временных зависимостей на входе и выходе звена «F».

Указание. Дробно-рациональное выражение « $1/(1+s)$ » соответствует передаточной функции звена «F». До изучения материала главы 2 оно понимается как символическая запись линейного дифференциального уравнения (s — символ дифференцирования):

$$x(t) = \frac{1}{1+s}u(t), \quad (1+s)x(t) = u(t), \quad \left(1 + \frac{d}{dt}\right)x(t) = u(t).$$

Здесь $x(t)$ — выход звена «F», $u(t) \equiv 1$ — вход звена «F».

Выполните задания.

1. Постройте с помощью Micro-Cap отклик на единичное входное воздействие для звена, описываемого линейным дифференциальным уравнением $x^{(2)}(t) + x^{(1)}(t) + 2x(t) = u(t)$. Объясните, почему функция $x(t)$ сходится с ростом t к значению 0.5.

2. Выполните предыдущее задание для звена с уравнением $x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) + 2x(t) = u(t)$. Объясните качественное поведение графика $x(t)$.
3. Закройте окно анализа переходных характеристик и в режиме редактирования схемы добавьте в схему между звеньями «Voltage Source» и «F» звено вычитания «Sub». Замкните отрицательную обратную связь, проведя соединение от выхода звена «F» до звена вычитания «Sub». Постройте переходную характеристику полученной схемы с отрицательной обратной связью (обратите внимание на автоматическое изменение нумерации узлов).
4. Соберите схему рулевой машинки со звеном « $F = \exp(-s)/s$ », отрицательной обратной связью и П-регулятором (рис. 1.16). Подберите значение коэффициента усиления П-регулятора (из интервала $[0.5, 2.5]$) для устойчивой работы рулевой машинки. Постройте переходную характеристику.
5. Настройте коэффициент усиления П-регулятора рулевой машинки по методу Никольса—Циглера.

10.2 Оптимальная настройка и сравнение регуляторов

Цели лабораторной работы: научиться настраивать ПИ- и ПИД-регуляторы эвристическим методом Никольса—Циглера и по минимуму интегральной ошибки регулирования.

Ход работы (8–10 ч).

1. Соберите в Micro-Cap Demo схему ПИ-регулятора (рис. 1.12) для объекта с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{e^{-sT}}{(1 + sT_0)^n}.$$

Параметры объекта выбираются из диапазонов $n \in \overline{3, 6}$, $T_0 \in [0,75; 1,60]$ в зависимости от варианта задания. Параметр задержки T принимает три значения 0, 1,5, 3,0 (исследуются три объекта).

2. Настройте параметры K и $T_{\text{и}}$ ПИ-регулятора (см. раздел 1.10):

- (а) эвристическим методом Никольса—Циглера;
 - (b) покоординатной оптимизацией K и $T_{\text{и}}$ по интегральному критерию качества;
 - (с) по параметрам переходной характеристики объекта (формулы приведены ниже).
3. Сравните полученные ПИ-регуляторы между собой по интегральному критерию качества.
 4. Соберите схему ПИД-регулятора (рис. 1.14).
 5. Настройте параметры K , $T_{\text{и}}$, $T_{\text{д}}$, $T_{\text{с}}$ ПИД-регулятора (см. раздел 1.10):
 - (а) эвристическим методом Никольса—Циглера;
 - (b) покоординатной оптимизацией K и $T_{\text{и}}$ по интегральному критерию качества (принять $T_{\text{д}} = T_{\text{и}}/4$ и $T_{\text{с}} = T_{\text{д}}/8$);
 - (с) по параметрам переходной характеристики объекта (формулы приведены ниже).
 6. Сравните полученные ПИ- и ПИД-регуляторы между собой по интегральному критерию качества.
 7. Предложите свои формулы настройки параметров ПИД-регулятора в зависимости от времени задержки T . Сравните по интегральному критерию качества регулятор, настроенный по вашим формулам, с регулятором, настроенным по параметрам переходной характеристики, для значений параметра задержки объекта $T = 1; 2; 10$.

*Настройка регулятора по параметрам переходной характеристики объекта*¹. Параметры переходной характеристики объекта управления представлены в таблице.

¹Давыдов Н. И., Идзон О. М., Симонова О. В. Определение параметров настройки ПИД-регулятора по переходной характеристике объекта регулирования // Теплоэнергетика. 1995. Н. 10. С. 17–22.

Параметры настройки регулятора

n	3	4	5	6
$T_{\text{инт}}$	$3T_0 + T$	$4T_0 + T$	$5T_0 + T$	$6T_0 + T$
$T_{\text{емк}}$	$0,805 T_0$	$1,43 T_0$	$2,10 T_0$	$2,81 T_0$
T_a	$3,69 T_0$	$4,46 T_0$	$5,12 T_0$	$5,70 T_0$

Условное запаздывание: $\tau^* \doteq T_{\text{емк}} + T$.

Первый вариант формул

1. ПИ-регулятор:

$$T_{\text{и}}/T_a = 0,153(\tau^*/T_a) + 0,362, \quad 1/K = 1,905(\tau^*/T_a) + 0,826.$$

2. ПИД-регулятор: $T_{\text{д}} = \alpha T_{\text{и}}$, $T_{\text{с}} = T_{\text{д}}/8$, $\alpha = 0,25$,

$$T_{\text{и}}/T_a = 0,186(\tau^*/T_a) + 0,532, \quad 1/K = 1,552(\tau^*/T_a) + 0,078.$$

Второй вариант формул

1. ПИ-регулятор:

$$T_{\text{и}}/T_{\text{инт}} = -0,467(\tau^*/T_{\text{инт}}) + 0,624, \quad 1/K = 4,345(\tau^*/T_{\text{инт}}) - 0,151.$$

2. ПИД-регулятор: $T_{\text{д}} = \alpha T_{\text{и}}$, $T_{\text{с}} = T_{\text{д}}/8$, $\alpha = 0,4$,

$$T_{\text{и}}/T_{\text{инт}} = -0,150(\tau^*/T_{\text{инт}}) + 0,552, \quad 1/K = 2,766(\tau^*/T_{\text{инт}}) - 0,521.$$

10.3 Введение в программную среду Scilab

Программная среда Scilab [11] представляет собой свободно распространяемый пакет прикладных математических программ для инженерных (технических) и научных расчётов (<http://www.scilab.org>). Язык программирования Scilab близок к MATLAB.

Цель работы: познакомиться с базовыми возможностями среды Scilab.

Ход работы (2–4 ч).

1. Установите на компьютере Scilab.

2. Выполните задания 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1 из 14-й главы книги [11]. Задание 5.1 выполняется без расчета коэффициентов корреляции и регрессии. В каждом задании достаточно выполнить только один пример, указанный преподавателем.

Дополнительное задание:

1. Познакомьтесь с интегрированием систем дифференциальных уравнений в Scilab (функция `ode`) [11, глава 8].
2. Для объекта из задания 1 с нулевой задержкой $T = 0$:
 - (a) постройте передаточную функцию замкнутой системы управления с ПИ-регулятором (с параметрами, настроенными по минимуму интегральной ошибки регулирования);
 - (b) выпишите матрицы равносильной системы в канонической форме первого порядка;
 - (c) постройте с помощью функции `ode` отклик замкнутой системы ПИ-регулирования на ступенчатый входной сигнал;
 - (d) вычислите интегральную ошибку регулирования;
 - (e) сравните полученные графики и расчеты с расчетами, выполненными в MicroCap.

10.4 Вычисление запаса устойчивости по годографу Найквиста

Цель работы: исследовать запас устойчивости ПИ- и ПИД-регуляторов по амплитуде и фазе по годографу Найквиста (см. раздел 3.4).

Ход работы (4–6 ч).

1. Видоизмените схемы ПИ- и ПИД-регуляторов, настроенных при выполнении лабораторной работы 10.2: источник постоянного тока замените на источник переменного тока «`sine source`»; разомкните обратную связь. В качестве примера можно использовать приведенный ниже текстовый файл «`Nyquist.СКТ`», который следует открыть в Micro-Cap Demo через меню «`File>Open`».

2. Постройте годограф Найквиста через меню «Analysis>АС».
3. Вычислите по годографу Найквиста запасы устойчивости по амплитуде и фазе для каждого из регуляторов.
4. Сравните запасы устойчивости ПИ- и ПИД-регуляторов.
5. Постройте годограф Найквиста в виде двух *диаграмм Боде* зависимостей амплитуды и фазы годографа от частоты. Для примера используйте приложенный ниже файл «Nyquist_Vode.СКТ». Его следует открыть в Micro-Cap Demo через меню «File>Open».
6. Включите в свойствах графика числовой вывод диаграмм Боде и по полученным массивам определите запасы устойчивости по амплитуде и фазе.

Приложение.

1. Файл «Nyquist.СКТ»

```

C:\mc8demo\data\al\Nyquist.CIR Transient Analysis
* Converted From Micro Cap Source file to PSPICE
*
V1 INTERIOR_NONE1 0 SIN (0 1 10MEG 0 0 0)
RV1 4 INTERIOR_NONE1 0.001 ;added by V1
X91 1 2 AMP
+PARAMS: GAIN=0.97
X92 2 3 F
+PARAMS: FS={EXP(-S*0.6)/POW(1+S*1.2,6)}
X95 4 5 1 SUM
+PARAMS: KA=1 KB=1
X96 4 5 F
+PARAMS: FS={1/(S*6.2)}
*
*
.SUBCKT AMP PINA PINB
+PARAMS: GAIN=1
E1 PINB 0 PINA 0 {GAIN}
RE1 PINA 0 1G;added by E1
.ENDS AMP
*
*
.SUBCKT F PINA PINB
+PARAMS: FS={1/(S+1K)}
E1 PINB 0 LAPLACE {V(PINA,0)} = {{FS}}
RE1 PINA 0 1G;added by E1

```

```

.ENDS F
*
*
.SUBCKT SUM PINA PINB PINC
+PARAMS: KA=1 KB=1
E1 PINC 0 VALUE = {{KA}*V(PINA)+{KB}*V(PINB)}}
.ENDS SUM
*
.OPTIONS ACCT LIST OPTS ABSTOL=1pA CHGTOL=.01pC
+ DEFL=100u DEFW=100u
+ DIGDRVF=2
+ DIGDRVZ=20K DIGERRDEFAULT=20
+ DIGERRLIMIT=0 DIGFREQ=10GHZ
+ DIGINITSTATE=0
+ DIGIOLVL=2 DIGMNTYMX=2 DIGMNTYSCALE=0.4
+ DIGOVRDRV=3 DIGTYMXSCALE=1.6
+ GMIN=1p
+ ITL1=100 ITL2=50 ITL4=10 PIVREL=1m PIVTOL=.1p
+ RELTOL=1m TNOM=27
+ TRTOL=7 VNTOL=1u
+ WIDTH=80
*
.LIB "C:\mc8demo\library\NOM.LIB"
*
.TEMP 27
.TRAN 3 150 0 UIC
.PRINT TRAN V(2)
.PLOT TRAN V(2)
.PRINT TRAN V(7)
.PLOT TRAN V(7)
.PROBE
.END
;$SpiceType=PSPICE

```

2. Файл «Nyquist_Bode.СКТ»

```

C:\mc8demo\data\al\Nyquist_Bode.CIR Transient Analysis
* Converted From Micro Cap Source file to PSPICE
*
V1 INTERIOR_NONE1 0 SIN (0 1 10MEG 0 0 0)
RV1 4 INTERIOR_NONE1 0.001 ;added by V1
X91 1 2 AMP
+PARAMS: GAIN=0.97
X92 2 3 F
+PARAMS: FS={EXP(-S*0.6)/POW(1+S*1.2,6)}
X95 4 5 1 SUM
+PARAMS: KA=1 KB=1
X96 4 5 F
+PARAMS: FS={1/(S*6.2)}

```

```

*
*
.SUBCKT AMP PINA PINB
+PARAMS: GAIN=1
E1 PINB 0 PINA 0 {GAIN}
RE1 PINA 0 1G;added by E1
.ENDS AMP
*
*
.SUBCKT F PINA PINB
+PARAMS: FS={1/(S+1K)}
E1 PINB 0 LAPLACE {V(PINA,0)} = {{FS}}
RE1 PINA 0 1G;added by E1
.ENDS F
*
*
.SUBCKT SUM PINA PINB PINC
+PARAMS: KA=1 KB=1
E1 PINC 0 VALUE = {{KA}*V(PINA)+{KB}*V(PINB)}
.ENDS SUM
*
.OPTIONS ACCT LIST OPTS ABSTOL=1pA CHGTOL=.01pC DEFL=100u
+ DEFW=100u DIGDRVF=2
+ DIGDRVZ=20K DIGERRDEFAULT=20
+ DIGERRLIMIT=0 DIGFREQ=10GHz
+ DIGINITSTATE=0
+ DIGIOLVL=2 DIGMNTYMX=2 DIGMNTYSCALE=0.4
+ DIGOVRDRV=3
+ DIGTYMXSCALE=1.6 GMIN=1p
+ ITL1=100 ITL2=50 ITL4=10 PIVREL=1m PIVTOL=.1p
+ RELTOL=1m TNOM=27
+ TRTOL=7 VNTOL=1u
+ WIDTH=80
*
.LIB "C:\mc8demo\library\NOM.LIB"
*
.TEMP 27
.TRAN 3 150 0 UIC
.PRINT TRAN V(2)
.PLOT TRAN V(2)
.PRINT TRAN V(7)
.PLOT TRAN V(7)
.PROBE
.END
;$SpiceType=PSPICE

```

10.5 Дискретизация уравнений систем автоматического управления с ПИ- и ПИД-регуляторами. Анализ точности дискретизации

Цель работы: построить дискретные аналоги систем управления из лабораторной работы 10.2; исследовать зависимость точности дискретизации от шага временной сетки и типа регулятора.

Ход работы (4–6 ч).

1. Для ПИ- и ПИД-регулятора из лабораторной работы 10.2 при $T = 0$ средствами Scilab постройте дискретный аналог в виде системы разностных уравнений в нормальной форме первого порядка (см. раздел 5.1).
2. Постройте в Micro-Cap Demo переходные характеристики непрерывных регуляторов и выведите результат в числовой массив (используя числовой вывод графиков).
3. Вычислите в Scilab переходные характеристики дискретных аналогов регуляторов и выведите результат в числовой массив.
4. Сравните переходные характеристики непрерывных регуляторов и дискретных аналогов по норме ошибки

$$e \doteq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [h((k-1)\tau) - h_d[k]]^2},$$

где $h(t)$ — переходная характеристика непрерывного регулятора, вычисленная в Micro-Cap Demo, $h_d[k]$ — переходная характеристика дискретного аналога регулятора, вычисленная в Scilab, τ — шаг временной сетки.

5. Исследуйте зависимость ошибки дискретизации e от шага τ временной сетки для ПИ- и ПИД-регуляторов.

10.6 Расчет запаса устойчивости системы управления с дискретным и непрерывным временем по норме решения матричного уравнения Ляпунова

Цель работы: рассчитать запасы устойчивости ПИ- и ПИД-регуляторов по норме решения матричного уравнения Ляпунова; сравнить с показателями устойчивости по годографу Найквиста из лабораторной работы 10.4.

Ход работы (2–4 ч).

А. Системы управления с непрерывным временем

1. Для непрерывных систем управления с ПИ- и ПИД-регуляторами из лабораторной работы 10.2 при нулевой задержке $T = 0$ напишите программу Scilab, вычисляющую
 - (а) матрицу A системы в нормальной форме первого порядка с матрицами A, B, C ;
 - (б) решение H уравнения Ляпунова $A^T H + H A = -I$;
 - (с) собственные числа H с проверкой положительной определенности $H > 0$;
 - (д) показатель устойчивости $\kappa(A) = \|H\|$.
2. Сравните ПИ- и ПИД-регуляторы по значению показателя устойчивости $\kappa(A)$. Объясните физический смысл показателя $\kappa(A)$.

Б. Системы управления с дискретным временем

1. Для дискретных систем управления с ПИ- и ПИД-регуляторами из лабораторной работы 10.4 (при задержке $T = 1.5$), записанных в нормальной форме первого порядка с матрицами A_d, B_d, C_d , напишите программу Scilab, которая вычислит
 - (а) решение H_d дискретного уравнения Ляпунова $A_d^T H_d A_d - H_d = -I$;
 - (б) собственные числа H_d с проверкой положительной определенности $H_d > 0$;
 - (с) показатель устойчивости $\kappa_d(A_d) = \|H_d\|$.

2. Сравните дискретные ПИ- и ПИД-регуляторы по значению показателя устойчивости $\kappa_d(A_d)$. Объясните физический смысл показателя $\kappa_d(A_d)$.

10.7 Оценивание процессов по наблюдениям с возмущениями

Цель работы: научиться удалять шум из наблюдений процессов на основе линейных динамических моделей процессов.

Ход работы (2–4 ч).

1. Выполните упражнения 39 и 40.
2. Смоделируйте полученные решения в Scilab (см. примеры программ в разделе 9.1).
3. В Scilab постройте и сравните графики истинных, зашумленных и восстановленных процессов.
4. Объясните смысловую связь задачи аппроксимации из упражнений 39, 40 с задачей 1 фильтрации шума наблюдений (см. раздел 9.1).

10.8 Идентификация параметров уравнений системы по наблюдениям процессов с возмущениями

Цель работы: научиться идентифицировать различными методами параметры дискретных уравнений системы по зашумленным наблюдениям процессов.

Ход работы (4–6 ч).

1. Выполните упражнения 42 и 43.
2. Смоделируйте полученные решения в Scilab (см. примеры программ в разделе 9.1).
3. Восстановите процессы, решив задачу 1 (фильтрации) по методике из лабораторной работы 10.7 и используя значения параметров, которые были получены в результате идентификации.

10.8. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ

4. Постройте и сравните графики истинных, зашумленных и восстановленных процессов.
5. Пункты 3 и 4 повторите для каждого из трех методов идентификации.

Литература

- *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы: учеб. пособие / Д. П. Ким. М.: ФМЛ, 2003. 288 с.
- *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие / Д. П. Ким. М.: ФМЛ, 2004. 464 с.
- *Попов Е. П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: учеб. пособие / Попов Е. П. 2-е изд. М.: «Наука», 1989. 304 с.
- *Попов Е. П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: учеб. пособие / Попов Е. П. 2-е изд. М.: «Наука», 1988. 256 с.
- *Краснов М. Л.* Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры: учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. Изд. 5-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 175 с.

Дополнительная литература

1. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. СПб.: «Наука», 2000. 475 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: «Наука», 1969. 368 с.
3. *Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А.* Теория автоматического регулирования (линеаризованные задачи) / Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодола. М.: Изд. АН СССР, 1949. 430 с.

4. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: «Наука», 1983. 392 с.
5. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. М.: «Наука», 1969. 424 с.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. М.: «Наука», 1966. 576 с.
7. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры / С. К. Годунов. Новосибирск: «Научная книга», 1997. 390 с.
8. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. Учебное пособие / Г. В. Демиденко. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. 203 с.
9. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. М.: «Наука», 1966. 664 с.
10. *Амелина М. А., Амелин С. А.* Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. / М. А. Амелина, С. А. Амелин. М.: «Горячая линия — Телеком», 2007. 464 с.
11. *Алексеев Е. Р.* Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 269 с. <http://docs.altlinux.org/books/2008/altlibrary-scilab-20090409.pdf>
12. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z -преобразования: пер. с нем. / Г. Деч. М.: «Наука», 1971. 288 с.